

复合材料细观力学

杜善义 王 彪 编著

科学出版社



复合材料细观力学

杜善义 王 彪 编著

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书是有关复合材料细观理论的专著,是在作者与合作者多年研究工作成果的基础上参考国内、外有关研究文献编写而成。

本书主要内容涉及:复合材料的有效性能、连续纤维和短纤维复合材料细观强度理论、纤维增强复合材料细观损伤及断裂模型、脆性材料增韧、复合材料细观压缩失稳、压电复合材料细观力学、复合材料细观计算力学和复合材料细观实验技术等。每章后均列有参考文献供读者查阅。

本书可供从事复合材料研究和设计人员、复合材料力学工作者参考,也可作为有关专业研究生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

复合材料细观力学/杜善义,王彪编著. —北京:科学出版社,1997

ISBN 7-03-006182-9

I. 复… I. ①杜… ②王… II. 复合材料-材料力学
IV. TB33

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第15771号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

新蕾印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年3月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1998年3月第一次印刷 印张:11 1/2

印数:1— 2500 字数:300 000

定价:21.00 元

前 言

复合材料作为先进材料有许多传统材料所无法比拟的优越性,它的研究和应用得到迅速发展。从航空航天、国防推广到民用产业,从主要是结构材料转到既是结构又兼有某种功能的综合性材料,是材料、工程和力学工作者十分感兴趣的研究领域。

我们知道,复合材料本身有强烈的结构特征,它是一种多相体(基体、增强或增韧相、界面相等)材料。因而其性能和损伤破坏规律取决于其组分材料性质,但同时也取决于其细观结构特征,这些特征包括增强相(例如纤维)的体积份数、分布规律、形状以及界面相的性质等。要想揭示复合材料细观特征对其性能的影响,细观力学大有用武之地,这就提出了一个十分有趣、引人入胜的课题,即如何用细观力学的理论和方法去预报和分析其性能、揭示其损伤和破坏的本质。这里有两层重要意义,其一是,为结构设计选材和材料以及结构的安全分析提供理论依据和分析方法;其二则是针对复合材料也是一种结构的特点,用细观力学理论优化性能以至于达到设计复合材料的目。

近十年来,哈尔滨工业大学复合材料研究所的研究人员(包括部分博士研究生)对本领域进行了较为系统的研究,国内外诸多研究者对此也均作出了贡献,考虑到目前国内外尚无复合材料细观力学方面的专著,故决定完成这部汇总我们和国内外本方面研究成果的专著。细观力学理论的研究至少有 40 多年的历史,有一些像 Eshelby 理论等成熟理论,然而这些理论的模型是针对一些简单或理想问题,有一定局限性。因此,对复合材料而言,必须对这些理论进行改进、完善或在这些理论基础上探索新的理论和方法。本书所涉及的复合材料细观理论内容较丰富,不仅有刚度的预报,也有强度和断裂分析,而且有细观计算和实验方法内容,为了使读者

查阅和引用方便,每章后面均列出了与该章内容有关的参考文献。

作者希望并且相信,本书不只是作为一种在复合材料细观方面填补国内空白的专著,而且能够成为从事复合材料研制和应用人员、设计人员、复合材料力学工作者以及有关专业研究生的参考书。

作者特别感谢梁军和刘金喜博士对本书的贡献,他们分别撰写了第二章和第八章,同时为其它章节提供了大量参考资料。同时,作者十分感谢王殿富、韩杰才、吴林志、李文芳等教授在本书写作过程中提供的有益帮助,作者还特别感谢清华大学杨卫教授为本书有关章节所提供的宝贵研究资料,没有他们的帮助,本书是很难完成的。

由于作者水平有限,又无本方面专著可借鉴,不当之处在所难免,希望读者不吝指正。

作 者

1997 年 4 月

目 录

前言	v
第一章 绪 论	1
§ 1.1 复合材料细观力学研究概况	1
§ 1.2 复合材料细观力学的研究任务及研究方法	3
§ 1.3 本书内容安排	4
第二章 复合材料的有效性能	5
§ 2.1 复合材料的有效弹性模量	6
§ 2.2 Eshelby 等效夹杂理论	8
§ 2.2.1 Eshelby 相变问题	8
§ 2.2.2 等效夹杂原理	12
§ 2.3 复合材料等效弹性模量的自治理论	15
§ 2.4 有效弹性模量的微分法	24
§ 2.5 预报有效弹性模量的 Mori-Tanaka 方法	28
§ 2.6 复合材料有效弹性模量的上、下限	42
§ 2.6.1 Voigt 和 Reuss 的上、下限	42
§ 2.6.2 Hashin 和 Shtrikman 的上、下限	44
§ 2.7 复合材料的热膨胀系数预报	51
参考文献	55
第三章 连续纤维复合材料细观强度理论	59
§ 3.1 复合材料中的应力集中	60
§ 3.1.1 单根纤维破坏导致的应力集中	60
§ 3.1.2 多根纤维破坏导致的应力集中	67
§ 3.1.3 应力集中的近似计算方法	74
§ 3.1.4 动态应力集中因子	81
§ 3.2 单根纤维强度分布	83
§ 3.3 纤维束的强度分布	86
§ 3.4 单向纤维增强复合材料强度预报	97

§ 3.4.1 均匀载荷分担模型	100
§ 3.4.2 局部载荷分担模型	100
参考文献	114
第四章 短纤维复合材料细观强度理论	118
§ 4.1 短纤维承载分析	118
§ 4.1.1 弹性应力传递	119
§ 4.1.2 单向短纤维增强金属基复合材料	124
§ 4.1.3 短纤维增强树脂基复合材料	126
§ 4.1.4 短纤维增强陶瓷、水泥等材料	130
§ 4.1.5 随机方位的短纤维增强复合材料	131
§ 4.1.6 纤维之间的相互作用	137
§ 4.2 单向增强短纤维复合材料强度模型	142
§ 4.3 随机短纤维增强复合材料	152
§ 4.4 方位完全随机短纤维复合材料强度问题	157
参考文献	159
第五章 纤维增强复合材料细观损伤及断裂模型	161
§ 5.1 复合材料细观损伤模型	161
§ 5.1.1 十字叠层的层合板横向层开裂模型	161
§ 5.1.2 复合材料层合板的脱层损伤	175
§ 5.2 脆性基体复合材料断裂模型	199
§ 5.2.1 脆性基体稳态开裂应力	199
§ 5.2.2 确定基体开裂应力的桥联模型	215
§ 5.3 复合材料断裂的统计细观力学模型	227
参考文献	235
第六章 脆性材料增韧增强模型	238
§ 6.1 相变增韧模型	239
§ 6.2 微裂纹增韧模型	247
§ 6.3 偏转增韧	250
参考文献	250
第七章 复合材料的细观压缩失稳	251
§ 7.1 单向复合材料细观压缩失稳研究概况	251
§ 7.2 平面弹塑性失稳理论	253

§ 7.3 贯穿型失稳及折曲带的形成	255
§ 7.4 表面失稳与扩展折曲带	259
§ 7.5 压缩失稳模式的缺陷敏感性	268
§ 7.6 水平破坏带的扩展	271
参考文献	271
第八章 压电复合材料的细观力学模型	273
§ 8.1 压电材料的基本方程	274
§ 8.2 压电介质的 Stroh 方法	277
§ 8.3 含椭圆夹杂压电材料的机电耦合场分析	281
§ 8.3.1 椭圆夹杂	281
§ 8.3.2 裂 纹	287
§ 8.4 含椭球形夹杂压电材料的弹性场和电场	288
§ 8.5 压电复合材料的有效性能预报	296
§ 8.5.1 预报有效电弹性能的 Dilute 方法和 Mori-Tanaka 方 法	297
§ 8.5.2 典型数值结果	300
附录 A 横观各向同性压电材料的压电方程(x_3 为极化方向)	304
附录 B $N^i(i=1,2,3)$ 的非零元素(基体横观各向同性压电材料)	304
参考文献	307
第九章 复合材料细观计算力学	310
§ 9.1 有限元方法	310
§ 9.2 复合材料损伤破坏过程的 Monte-Carlo 模拟	324
§ 9.3 复合材料断裂过程模拟的格构模型	332
参考文献	340
第十章 复合材料细观实验技术	343
§ 10.1 单根纤维强度分布的实验测试技术	343
§ 10.2 纤维与基体界面性能测试技术	346
§ 10.2.1 压头顶出方法	347
§ 10.2.2 埋藏纤维拔出方法(pull-out)	349
§ 10.2.3 单根纤维碎断测量方法	351
§ 10.2.4 实验测试方案的合理性研究	352

§ 10.3 复合材料层合板层间断裂韧性测定方法	354
§ 10.3.1 双悬臂梁(DCB)弯曲实验方法	354
§ 10.3.2 单边切口挠曲(ENF)试验方法	355
§ 10.3.3 混合型脱层测试方法	356
参考文献	358

第一章 绪 论

§ 1.1 复合材料细观力学研究概况

复合材料是由两种或两种以上组分材料所组成的新材料。根据不同的工程需要,人们可以方便地选取不同的组分材料,采用最适合的复合材料细观结构,优化材料的性能。由于它具有高比强、高比模等许多优越于传统金属材料的性能,在航空航天、建筑、交通、机械、化工设备等许多领域都得到了愈来愈广泛的应用。甚至已成为许多高科技领域的支撑材料。复合材料细观力学的核心任务是建立复合材料宏观性能同其组分性能及其细观结构之间的定量关系,并揭示复合材料结构在一定工况下的响应规律及其本质。为复合材料的优化设计、性能评价提供必要的理论依据及手段。复合材料细观力学最早期的工作可以认为起源于非均匀介质有效性能的预报。可以追溯到 19 世纪爱因斯坦关于由两种不同介电性能的电介质组成的复合电介质的等效介电常数的预报问题。这类研究的基本问题可归结如下:尽管研究的材料在细观或微观层次上是不均匀的,但总是可以设想存在一有效介质,该有效介质具有与实际非均匀材料同样的响应规律,即具有同样的宏观性能。那么,根据不同的非均匀材料预报它们的等效宏观性能就构成了细观力学最早期的研究工作。尽管预报多晶金属材料的有效性能也曾促进了非均匀材料有效性能预报理论的发展,但客观地说,则是由于 60 年代以来先进复合材料的发展及广泛应用,人们迫切需要有一个理论来确定两种或多种材料构成的复合材料如何能达到最好的刚度、热物理特性等宏观性能,这些工程需要才真正地促进了复合材料有效性能预报理论研究的发展。这一领域的研究方法及其体系已经相当完备,在人们的头脑中留下了深刻的印象,甚至很多人

认为复合材料细观力学的研究等同于复合材料有效性能的预报。有效性能一般指材料的平均性能,尽管它们也依赖于材料的细观结构,但对其细观结构细节并不太敏感,因此,许多预报复合材料有效性能的工作仅仅包含了纤维体积含量参数作为表征材料细观结构的参数。由于这实际上未充分考虑材料的细观特征,虽然预报方法简单,但未揭示材料性能和破坏的本质。

随着复合材料的发展及广泛应用,人们愈来愈迫切地要求建立更合理完善的理论来预报复合材料的强度、断裂韧性等有关性能。复合材料的强度预报比复合材料有效性能预报要复杂得多。这主要由于复合材料的强度取决于十分复杂的损伤演化过程,包括:基体开裂,界面脱胶及纤维断裂等许多现象。作为揭示材料细观损伤演化过程的基础,Hedgepeth 提出的剪滞法模型占据了十分重要的位置。应用此模型可分析复合材料内部一断裂纤维周围的应力分布。因为能够得到由于部分纤维的破坏对其它未断裂纤维产生的效果,这就可以揭示复合材料的损伤演化规律。剪滞法模型是一简单的近似模型,后来又有大量针对类似问题的研究工作出现。然而,到目前为止,这种载荷传递规律的研究工作还远远未能达到令人满意的程度。最早建立的复合材料细观强度模型可以认为是纤维束强度模型。由于纤维强度的统计分散性,纤维束的破坏也涉及到纤维逐次破坏的损伤过程,但由于存在有未断裂纤维将平均承担总的外加载荷这一简单的载荷传递规律,而使得细观力学的分析工作较为简单。

复合材料细观力学高速发展的另一动力来源于 80 年代中期以来陶瓷等脆性基体复合材料得到人们的广泛关注。陶瓷材料以其耐高温、耐磨、耐腐蚀而著称,但由于其断裂韧性较低的脆性性质限制了它们的广泛应用。随着纤维及晶须增韧陶瓷基复合材料的研制成功,人们发现,通过一些途径可增加陶瓷材料的断裂韧性,而增韧效果同纤维与基体界面性能等细观结构参数密切相关。这样,揭示脆性基体复合材料的增韧机制,寻找具有最佳增韧效果的微结构组合,激发了许多力学工作者同材料科学工作者合作寻

找正确的答案,这使得复合材料细观力学学科得到了进一步的发展。

对复合材料有效刚度而言,尽管有许多问题,例如解析解以及多向编织材料的复杂结构等尚未圆满解决,但从应用和工程角度,从理论和方法上较为成熟。然而,强度、损伤和断裂等性能研究,比其有效模量研究更复杂些,因此,虽然人们投入了相当大的精力对复合材料损伤破坏规律及强度、断裂韧性等性能进行研究,但远未达到令人满意的程度。研究的难点在于复合材料破坏过程的随机性及复杂性。为了取得较大的进展,应该对经典力学的研究方法思路有所突破。目前复合材料发展的一个重要趋势是结构与功能材料一体化。由于多场的耦合作用给细观力学的建模工作带来了较大的困难,同时,该领域的发展又迫切需要复合材料细观力学的指导以使得材料的设计及应用水平有所提高。

§ 1.2 复合材料细观力学的研究任务及研究方法

复合材料细观力学研究的目的在于建立复合材料的宏观性能同其组分材料性能及细观结构之间的定量关系。它要揭示不同的材料组合具有不同宏观性能的内在机制。并回答诸如:为什么该种复合材料具有如此高的强度、刚度、断裂韧性等此类问题。同时,它主要的研究背景还在于,根据工程需要选取合适的组分材料,设计最优的复合材料结构。对于传统金属材料来说,可以针对不同的材料测得其宏观材料性能,并列表以供选择使用。而对于复合材料来说,其组分材料、含量、细观结构等参数稍有变化将产生具有不同宏观性能的不同材料,因此,试图通过实验测得所有材料组合的性能是不现实的。从这一角度看,复合材料细观力学是有明确的工程应用背景,是复合材料发展的重要理论基础。

除了预报复合材料有效性能的细观力学理论体系较为完善外,复合材料的强度、断裂韧性等性能预报的细观力学方法相当广泛,还未形成一完备的理论体系。但在建立正确的细观力学模型

时,应遵循如下原则:首先应针对所研究的材料进行大量的定性或半定量的宏观性能及细观机制实验工作,以保证对材料在环境载荷作用下的响应有一清晰的认识,并弄清不同的组分材料及细观结构在材料响应中所起的作用。在此基础上,建立预报材料宏观性能的细观力学模型。应该注意的是,组分材料的性能,如纤维的强度,往往具有较大的统计分散性。正是由于这种分散性导致了材料破坏过程十分复杂,已经断裂的纤维无疑会影响到尚未断裂纤维的完整性,这种相互作用是复合材料细观强度模型的复杂所在。如果能够考虑到组分材料的性能及细观结构的随机性以及它们之间的破坏相关性建立这一耗散结构的统计模型,相信可以正确预报材料的宏观性能,揭示复合材料细观结构的演化规律,正如利用统计力学可以揭示临界现象的基本规律一样。

§ 1.3 本书内容安排

本书第一章是绪论。第二章介绍预报复合材料有效性能的细观力学模型。第三章将详细介绍连续纤维复合材料的细观强度模型。在第四章中,将重点引入预报短纤维复合材料强度性能的细观力学理论。第五章的主要内容是讨论纤维增强复合材料的细观损伤和断裂模型。第六章将着重介绍脆性材料的增韧增强模型。第七章对复合材料压缩失稳问题的细观力学研究工作进行扼要总结。第八章将介绍压电复合材料的细观力学模型。第九章对复合材料细观计算力学进行扼要总结。最后,第十章将简单介绍细观实验技术。

第二章 复合材料的有效性能

众所周知,单一材料通常难以很好满足工程应用的要求,现在材料工程提供了将两种或两种以上的材料进行复合的工艺手段,这样我们就有可能根据具体的工程应用要求来设计复合材料。在实践中,通过改变复合材料的组分与其几何分布形态就可以改变它的宏观性能。复合材料力学的任务之一就是建立合理的细观力学模型,分析与计算复合材料各组成相的力学性能,几何形状和分布参数与复合材料宏观力学性能之间的关系,从而为复合材料的设计提供理论依据,优化其力学性能。

一般来说,复合材料的基本力学性能可分为两方面,即局部性能和宏观有效性能。对于前一个问题。其关键之处在于如何求得复合材料内部的弹性场,而对于后一个问题,则包含两方面内容,一是刚度预报问题,二是强度预报问题。范赋群等^[1]对复合材料性能提出了混合效应和协同效应的观点,认为混合效应与材料刚度问题密切相关,是个平均效应,而协同效应与材料强度、破坏等现象密切相关,是个非平均效应。本章我们将重点讨论复合材料的刚度问题,强度问题的研究在下面几章中详细介绍。

影响复合材料有效弹性模量的因素可分为两类,一类是复合材料中每一组分材料的弹性常数。另一类是复合材料内部的微结构特征,它包括夹杂(纤维、颗粒、晶须、空洞、裂纹等)的形状、几何尺寸、在基体中的分布和夹杂之间的相互作用。目前,考虑这两类因素的影响,研究复合材料有效性能的细观力学方法很多,大体上较为成熟的理论有:Eshelby^[2,3]等效夹杂理论,自洽理论^[4,5],Mori-Tanaka 方法^[6],微分介质方法^[7],以及利用变分原理求上、下限方法^[8,9]等,下面将详尽介绍这些计算复合材料有效性能的分析方法。

§ 2.1 复合材料的有效弹性模量

复合材料通常是由许多极细小的增强相与基体复合而成,在

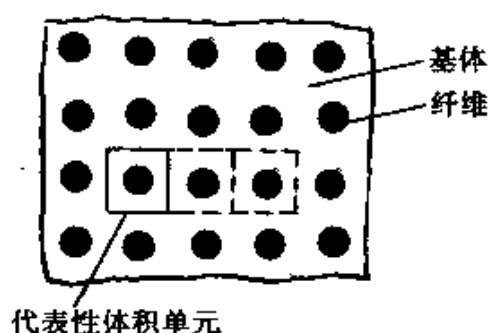


图 2.1 代表性体积单元

细观尺度上,它具有分区均匀的弹性性质。然而在宏观尺度上,复合材料在结构分析中的作用可以用一与其具有相同弹性性能的等效介质来取代,这一等效介质的弹性模量也被称为复合材料的有效弹性模量。通常在复合材料内部定义代表性体积单元,如图 2.1,这一比

组分材料尺寸大,比宏观材料尺寸小的体积单元,在外载作用下,其应变及响应等同于等效介质的应变及响应,据此,可以求得其有效弹性模量。

为定义复合材料的等效弹性模量,现考虑如下两类均匀边界条件:

$$u_i(s) = \epsilon_{ij}^0 x_j \quad (2.1)$$

$$T_i(s) = \sigma_{ij}^0 n_j \quad (2.2)$$

这里 $u_i(s)$ 和 $T_i(s)$ 为边界 S 上的位移矢量与面力矢量, ϵ_{ij}^0 与 σ_{ij}^0 是常应变张量与常应力张量。在均匀边界条件作用下,除了边界点附近可能有扰动存在,统计均匀的复合材料应力场与应变场也是统计均匀的。由于边界附近点所占的体积与整个复合材料体积相比很小,我们可以认为所有的场量在复合材料的代表性单元内体积平均值就等于它们在复合材料内的体积平均值。

复合材料的等效弹性常数张量 C_{ijkl}^* 与等效柔度张量 S_{ijkl}^* 分别定义为

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^* \bar{\epsilon}_{kl} \quad (2.3)$$

与

$$\bar{\epsilon}_{ij} = S_{ijkl}^* \bar{\sigma}_{kl} \quad (2.4)$$

其中 $\bar{\sigma}_{ij}$ 与 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 为代表性单元内应力与应变的体积平均值。

在给定边界条件(2.1)与(2.2)情况下,利用散度定理易证明:

$$\begin{aligned} v \bar{\epsilon}_{ij} &= \int_v \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_s (u_i n_j + u_j n_i) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_s (\epsilon_{ia}^0 x_a n_j + \epsilon_{ja}^0 x_a n_i) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_v [(\epsilon_{ia}^0 x_a)_{,j} + (\epsilon_{ja}^0 x_a)_{,i}] dv \\ &= \frac{1}{2} \int_v (\epsilon_{ia}^0 x_{a,j} + \epsilon_{ja}^0 x_{a,i}) dv \\ &= \int_v \epsilon_{ij}^0 dv = \epsilon_{ij}^0 v \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} v \bar{\sigma}_{ij} &= \int_v \sigma_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_s (T_i x_j + T_j x_i) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_s (\sigma_{ia}^0 n_a x_j + \sigma_{ja}^0 n_a x_i) ds \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ia}^0 \int_v x_{j,a} dv + \sigma_{ja}^0 \int_v x_{i,a} dv) \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ji}^0) v = \sigma_{ij}^0 v \end{aligned} \quad (2.6)$$

这样,我们就有

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^* \epsilon_{kl}^0 &= c_0 \bar{\sigma}_{ij}^{(0)} + \sum_{r=1}^n c_r \bar{\sigma}_{ij}^{(r)} \\ &= C_{ijkl}^{(0)} \epsilon_{kl}^0 + \sum_{r=1}^n c_r (C_{ijkl}^{(r)} - C_{ijkl}^{(0)}) \bar{\epsilon}_{kl}^{(r)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} S_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 &= c_0 \bar{\epsilon}_{ij}^{(0)} + \sum_{r=1}^n c_r \bar{\epsilon}_{ij}^{(r)} \\ &= S_{ijkl}^{(0)} \sigma_{kl}^0 + \sum_{r=1}^n c_r (S_{ijkl}^{(r)} - S_{ijkl}^{(0)}) \bar{\sigma}_{kl}^{(r)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

式中上标(0)代表复合材料的基体相,(r)代表复合材料的第r类增强相, c_0 与 c_r 分别为基体相与第r增强相的体积比率,它们满足

$$c_0 + \sum_{r=1}^n c_r = 1.$$

式(2.7)与式(2.8)表明,为确定复合材料的有效弹性性质,需要先求得各增强相的平均应变 $\bar{\epsilon}_{ij}^{(r)}$ 或平均应力 $\bar{\sigma}_{ij}^{(r)}$ 。一般来说这是一项非常困难的任务,它依赖于复合材料的所有微结构细节和每相材料的物理特性,其求解只能在一定的近似假定下进行。当然,在一些极其理想的情况下,复合材料有效性能的解析解是可以求出的,如 Hashin [11], Lee 和 Westman [12]。

同样,根据式(2.3)与(2.4)的定义以及散度定理可以证明,在满足边界条件(2.1)与(2.2)的情况下,复合材料内部代表性单元的应变能与余应变能可以分别表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} C_{ij\mu}^* \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{\mu}^0 dv \quad (2.9)$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dv = \frac{1}{2} S_{ij\mu}^* \sigma_{ij}^0 \sigma_{\mu}^0 dv \quad (2.10)$$

§ 2.2 Eshelby 等效夹杂理论

从前面的分析知道,复合材料等效弹性模量的计算可以归结为在均匀边界条件下求其内部各离散相的应力与应变的平均值问题。复合材料的增强相可以看作为嵌入弹性基体的夹杂。因此,1957年英国著名科学家 Eshelby 在英国皇家学会会刊中发表了关于无限大体内含有椭球夹杂弹性场问题的文章^[2,3],作者针对含本征应变的椭球颗粒,给出了椭球内外弹性场的一般解,并利用应力等效的方法(后来发展为等效夹杂理论)得到了非均匀椭球颗粒的内外弹性场。他的一个重要结论是当本征应变均匀时(对本征应变颗粒)或外载均匀时(对非均匀颗粒),椭球颗粒内部的弹性场也是均匀的,并可用椭圆积分的形式表示出来,这个解后来就成为等效弹性模量计算的基础。本节将扼要介绍 Eshelby 的工作。

§ 2.2.1 Eshelby 相变问题

设想在一个均匀各向同性的无限大弹性体内有一局部区域 Ω , 其材料由于某种原因(例如相变),在无约束的情况下将产生一

个永久变形 ϵ_{ij}^* 。Eshelby 将此应变称为相变应变, Mura^[13]则将其称为本征应变, 以涵盖更广泛的一类非弹性应变。由于在区域 Ω 的外部实际上有约束存在, 整个弹性体的位移与应变将是 u_i 与 ϵ_{ij} 。我们把应变 ϵ_{ij} 分解为两部分:

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \epsilon_{ij}^* \quad (2.11)$$

其中 e_{ij} 为弹性应变部分, 而本征应变 ϵ_{ij}^* 在区域 Ω 的外部取值为零。

根据弹性力学中的虎克定律, 弹性体的应力为

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (2.12)$$

其中

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (2.13)$$

λ 与 μ 为拉梅常数, δ_{ij} 为 Kronecker 记号。

将应力表达式(2.12)代入平衡方程中, 得

$$C_{ijkl} \epsilon_{kl,j} = C_{ijkl} \epsilon_{kl,j}^* \quad (2.14)$$

同时由于弹性体上无外载荷作用, 在其外边界上有

$$C_{ijkl} \epsilon_{kl} n_j = 0 \quad (2.15)$$

从式(2.14)与(2.15)可以看出, Eshelby 相变问题相当于在弹性体内部作用有分布体力—— $C_{ijkl} \epsilon_{kl,j}^*$ 的问题。

在经典弹性力学中, Kelvin 曾给出均匀各向同性无限体内单位集中力引起的位移场的静态格林函数, 它为

$$G_{im}(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\delta_{im}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{16\pi\mu(1-\gamma)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} |\vec{x} - \vec{x}'| \quad (2.16)$$

这里 $\vec{x}'$ 是单位力的作用点, $\vec{x}$ 是位移的计算点, 下标 i 表示位移的方向, m 表示单位力的作用方向, γ 为材料的泊松比。 $G_{im}(\vec{x} - \vec{x}')$ 可以理解为在点 $\vec{x}'$ 处沿 x_m 方向加一个单位集中力时, 点 $\vec{x}$ 处所产生的位移 x_i 分量。

根据格林函数的性质, Eshelby 相变问题的位移场可以表示为如下的积分:

$$\begin{aligned} u_i &= - \int_v C_{mjkl} \epsilon_{kl,j}^* G_{im}(\vec{x}, \vec{x}') dv(\vec{x}') \\ &= - \int_v C_{mjkl} \epsilon_{kl}^* G_{im,j}(\vec{x}, \vec{x}') dv(\vec{x}') \end{aligned} \quad (2.17)$$

这里“ $\cdot, j$ ”表示对坐标 x_j 求偏导数, 在导出上式时应用了高斯定理。与上述位移对应的应变场为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.18)$$

由式(2.12)给出区域 Ω 中总的应力为

$$\sigma_{pq} = C_{pqmn} \left\{ - \int_{\Omega} C_{klj} \epsilon_{ji}^* G_{mk,ln}(\vec{x}, \vec{x}') dv(\vec{x}') - \epsilon_{mn}^*(\vec{x}) \right\} \quad (2.19)$$

在基体 $D - \Omega$ 中为

$$\sigma_{pq} = C_{pqmn} \left\{ - \int_{\Omega} C_{klj} \epsilon_{ij}^* G_{mk,ln}(\vec{x}, \vec{x}') dv(\vec{x}') \right\} \quad (2.20)$$

假定在各向同性介质中形状为

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 \leq 1 \quad (2.21)$$

的椭球体夹杂 Ω 中, 发生了均匀的本征应变 ϵ_{ij}^* , Eshelby 计算了积分(2.17), 证明了当本征应变 ϵ_{ij}^* 为常数时, 椭球体 Ω 内的应变 ϵ_{ij} 是均匀的。它可以表示为

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^* \quad (2.22)$$

这里 S_{ijkl} 称为 Eshelby 四阶张量, 它具有如下的对称性质:

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} \quad (2.23)$$

引进记号 I_i 和 I_{ij} , 使

$$\begin{aligned} I_i &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)\Delta(u)} \\ I_{ij} &= 2\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{(a_i^2 + u)(a_j^2 + u)\Delta(u)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

其中 a_1, a_2 与 a_3 分别为椭球的三个主半轴长, 而

$$\Delta(u) = (a_1^2 + u)^{1/2} (a_2^2 + u)^{1/2} (a_3^2 + u)^{1/2} \quad (2.25)$$

Eshelby 张量最终可以表示成

$$S_{1111} = \frac{3}{8\pi(1-\gamma)} a_1^2 I_{11} + \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_1$$

$$S_{1122} = \frac{1}{8\pi(1-\gamma)} a_2^2 I_{12} - \frac{1-2\gamma}{8\pi(1-\gamma)} I_1$$

$$S_{1212} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{16\pi(1-\gamma)} I_{12} + \frac{1-2\gamma}{16\pi(1-\gamma)} (I_1 + I_2) \quad (2.26)$$

S_{ijkl} 其余非零分量可依次交换下标得到。当某一下标以奇数次出现时(如 S_{1112}, S_{1223} 等), S_{ijkl} 分量将等于零。

当椭球 Ω 的两个主半轴相等, 例如 $a_2 = a_3$ 时, 式(2.26) 与 (2.24) 可以简化为

$$S_{1111} = \frac{1}{2(1-\gamma)} \left[(1-2\gamma) + \frac{3\alpha^2-1}{\alpha^2-1} \right. \\ \left. - (1-2\gamma + \frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1})g \right]$$

$$S_{2222} = S_{3333} = \frac{3}{8(1-\gamma)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \\ + \frac{1}{4(1-\gamma)} \left[1-2\gamma - \frac{9}{4(\alpha^2-1)} \right] g$$

$$S_{2233} = S_{3322} = \frac{1}{4(1-\gamma)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} \right. \\ \left. - \left[1-2\gamma + \frac{3}{4(\alpha^2-1)} \right] g \right\}$$

$$S_{2211} = S_{3311} = -\frac{1}{2(1-\gamma)} \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} \\ + \frac{1}{4(1-\gamma)} \left[\frac{3\alpha^2}{\alpha^2-1} - (1-2\gamma) \right] g$$

$$S_{1122} = S_{1133} = -\frac{1}{2(1-\gamma)} \left(1-2\gamma + \frac{1}{\alpha^2-1} \right) \\ + \frac{1}{2(1-\gamma)} \left[1-2\gamma + \frac{3}{2(\alpha^2-1)} \right] g \quad (2.27)$$

$$S_{2323} = \frac{1}{4(1-\gamma)} \left\{ \frac{\alpha^2}{2(\alpha^2-1)} + \left[1-2\gamma - \frac{3}{4(\alpha^2-1)} \right] g \right\}$$

$$S_{1212} = S_{1313} = \frac{1}{4(1-\gamma)} \left\{ 1-2\gamma - \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[1-2\gamma - \frac{3(\alpha^2+1)}{\alpha^2-1} \right] g \right\}$$

其中 $\alpha = a_1/a_2$ 。当 $\alpha > 1$ 时, 上式中有

$$g = \frac{\alpha}{(\alpha^2-1)^{3/2}} [\alpha(\alpha^2-1)^{1/2} - ch^{-1}\alpha] \quad (2.28)$$

而当 $\alpha < 1$ 时, 则

$$g = \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)^{3/2}} [\cos^{-1} \alpha - \alpha(1 - \alpha^2)^{1/2}] \quad (2.29)$$

当夹杂区域 Ω 为球形时, $a_1 = a_2 = a_3$, 式(2.26) 可写成

$$\begin{aligned} S_{1111} &= S_{2222} = S_{3333} = (7 - 5\gamma)/15(1 - \gamma) \\ S_{1122} &= S_{2233} = S_{3311} = -(1 - 5\gamma)/15(1 - \gamma) \\ S_{1212} &= S_{2323} = S_{3131} = (4 - 5\gamma)/15(1 - \gamma) \end{aligned} \quad (2.30)$$

夹杂 Ω 内部的应力场为

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\mu \frac{16}{15(1 - \gamma)} \epsilon_{11}^* - 2\mu \frac{5\gamma + 1}{15(1 - \gamma)} \epsilon_{22}^* \\ &\quad - 2\mu \frac{5\gamma + 1}{15(1 - \gamma)} \epsilon_{33}^* \\ \sigma_{12} &= -2\mu \frac{7 - 5\gamma}{15(1 - \gamma)} \epsilon_{12}^* \end{aligned} \quad (2.31)$$

其它分量可变换下标求得。

后来, 具有均匀本征应变 ϵ_{ij}^* 的椭球体夹杂问题已由 Walpole、村外志夫、森勉等人推广到各向异性介质和本征应变在夹杂内不均匀的情况。对于各向异性介质, 当椭球体夹杂中的本征应变为均匀时, 夹杂内的总应变也将保持均匀, 并可给出 S_{ijkl} 的具体计算方法。对夹杂外部的弹性场也作了讨论, 不过情况比较复杂。弹性常数与基体不同的区域所产生的应力集中, 和本征应变引起的内应力问题是等效的。有关的讨论详见文献[13]。

§ 2.2.2 等效夹杂原理

考虑在弹性常数为 C_{ijkl} 的基体相 $D - \Omega$ 中, 存在一个弹性常数为 C_{ijkl}^1 的区域 Ω 的情况。我们把这种弹性常数与母相不同的区域称为异性夹杂(elastic inhomogeneity), 在无异性夹杂 Ω 存在时均匀的应力场, 由于 Ω 的出现将受到干扰。对于 Ω 的形状为椭球体的情况, 若假定物体为无限大, 我们将证明, 由此产生的位移和应力的受扰部分等效于 Ω 中本征应变取适当值的椭球体夹杂产生的位移和内应力。

令无异性夹杂 Ω 时由均匀的外部应力 σ_{ij}^0 作用产生的位移为 u_i^0 , 相应的弹性应变为 ϵ_{ij}^0 , 由于 Ω 的存在, 位移和弹性应变分别变为 $u_i^0 + u'_i$ 和 $\epsilon_{ij}^0 + \epsilon'_{ij}$, 其内部的应力场变为 $\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}$, 其中 σ'_{ij} 与 ϵ'_{ij} 为由于夹杂的存在而产生的扰动应力与应变, 它们满足

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij} = C_{ijkl}^1(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl}) \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (2.32)$$

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl}) \quad \text{在 } \Omega \text{ 外} \quad (2.33)$$

以及

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}\epsilon_{kl}^0 \quad (2.34)$$

Eshelby^[2]证明了在这种情况下夹杂内部的应力场与应变场是均匀的, 上述非均匀弹性体的弹性场可以用 Eshelby 相变问题来替代。设有一个均匀的弹性系数为 C_{ijkl} 的无限大弹性体, 它在远场受均匀应力 σ_{ij}^0 的作用, 同时在椭球形区域 Ω 内给定一均匀的本征应变 ϵ_{ij}^* 。根据式(2.12), 在这一弹性体内它的应力场为

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \quad (2.35)$$

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij} = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl}) \quad \text{在 } \Omega \text{ 外} \quad (2.36)$$

其中 σ'_{ij} 与 ϵ'_{ij} 为由于本征应变 ϵ_{ij}^* 而引起的扰动应力与应变, ϵ'_{ij} 满足式(2.22), 即

$$\epsilon'_{ij} = S_{ijmn}\epsilon_{mn}^* \quad (2.37)$$

比较式(2.32)式与(2.35), 可以看出如果这两个问题等效, 则有

$$C_{ijkl}^1(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl}) = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (2.38)$$

联立求解方程(2.38)与(2.37)就能够得到等效本征应变 ϵ_{ij}^* , 并进而求得夹杂内外的弹性场。

如果对于一个与母相弹性常数不同且具有本征应变 ϵ_{ij}^{*1} 的椭球体夹杂 Ω , 可用具有与母相相同的弹性常数, 与 Ω 相同的形状且与 ϵ_{ij}^{*1} 不同的本征应变 ϵ_{ij}^* 的夹杂来代替, 这一方法也是由 Eshelby 最先提出的, 它的等效方程可表述为

$$C_{ijkl}^1(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl} - \epsilon_{kl}^{*1}) = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \epsilon'_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (2.39)$$

如果存在与母相热膨胀系数不同的第二相材料, 即使整个物体的温度变化相同, 也会因热膨胀系数失配而产生本征应变。这时, 第

二相(夹杂)的弹性常数一般与母相不同,因此,(2.39)式对这类问题是有实际意义的。在后面对复合材料有效热膨胀系数的预报一节中,我们再详述它的计算过程。

作为一个例子,下面我们用 Eshelby 等效夹杂方法计算球形颗粒增强复合材料的等效弹性模量。为便于计算,我们假定基体及夹杂均为各向同性。在颗粒相的体积比率比较低时,颗粒分布比较稀疏,我们可以忽略不同颗粒之间的相互作用,即用单个球形颗粒嵌入无限大基体的模型来计算颗粒相中的应变。

当区域 Ω 为球形时,(2.22)式可分解成

$$\epsilon_{kk} = \alpha \epsilon_{kk}^*, \epsilon_{ij}^p = \beta \epsilon_{ij}^{*p} \quad (2.40)$$

其中 ϵ_{ij}^p 与 ϵ_{ij}^{*p} 为相应的应变偏量,常数 α 与 β 为

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{1+\gamma}{1-\gamma}, \beta = \frac{2}{15} \frac{4-5\gamma}{1-\gamma} \quad (2.41)$$

由于问题的对称性,Eshelby 等效原理式(2.38)可以分解为

$$\begin{aligned} [K_0 + \alpha(K_1 - K_0)] \epsilon_{kk}^* &= (K_0 - K_1) \epsilon_{kk}^0 \\ [\mu_0 + \beta(\mu_1 - \mu_0)] \epsilon_{ij}^{*p} &= (\mu_0 - \mu_1) \epsilon_{ij}^{0p} \end{aligned} \quad (2.42)$$

上式中 K 与 μ 分别为体积弹性模量与剪切模量,下标 0 与 1 分别代表基体相与颗粒相。由(2.42)式可以求得本征应变 ϵ_{kk}^* 与 ϵ_{ij}^{*p} ,并进而求得颗粒相中的应变为

$$\begin{aligned} \epsilon_{kk}^{(1)} &= \epsilon_{kk}^0 + \alpha \epsilon_{kk}^* = \frac{K_0}{K_0 + \alpha(K_1 - K_0)} \epsilon_{kk}^0 \\ \epsilon_{ij}^{p(1)} &= \epsilon_{ij}^{0p} + \beta \epsilon_{ij}^{*p} = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \beta(\mu_1 - \mu_0)} \epsilon_{ij}^{0p} \end{aligned} \quad (2.43)$$

将它们代入式(2.7),就得到了复合材料的等效弹性模量关系式为

$$\frac{K^* - K_0}{K_1 - K_0} = c_1 \frac{\epsilon_{kk}^{(1)}}{\epsilon_{kk}^0} = \frac{c_1 K_0}{K_0 + \alpha(K_1 - K_0)} \quad (2.44)$$

$$\frac{\mu^* - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0} = c_1 \frac{\epsilon_{ij}^{p(1)}}{\epsilon_{ij}^{0p}} = \frac{c_1 \mu_0}{\mu_0 + \beta(\mu_1 - \mu_0)} \quad (2.45)$$

其中 c_1 为颗粒相的体积比率。

§ 2.3 复合材料等效弹性模量的自洽理论

50 年代, Hershey^[14] 和 Kroner^[15] 先后提出自洽方法 (self-consistent method) 研究多晶体材料的弹性性能, 由于多晶体材料是由数目宏大的不同取向的单晶晶粒集合而成, 他们认为可以把多晶体中的单晶颗粒看作为嵌入具有多晶体宏观力学性能的无限大均匀介质中的一个夹杂。然后运用上一节的 Eshelby 等效方法以及相应的取向平均过程能够求得单晶力学性能与多晶体宏观力学性能之间的隐式关系。60 年代中期, 利用这一模型, Hill^[4] 证明了含球夹杂复合材料有效体积模量和剪切模量是在 Hashin 和 Shtrikman^[8] 的上下限之间, 而 Budiansky^[5] 根据 Eshelby^[2] 的结果导出了含球夹杂多相复合材料的有效体积模量、剪切模量和泊松比之间的三个耦合方程, 将上述方法成功地推广到多相复合材料的等效弹性模量的预测中来。

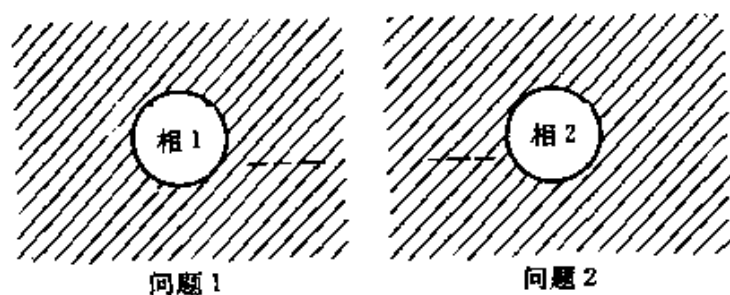


图 2.2 自洽模型

实际上, 自洽方法的基本思想很简单。如图 2.2 所示, 在计算夹杂内部应力场时, 为了考虑其它夹杂的影响, 认为这一夹杂单独处于一有效介质中, 而夹杂周围有效介质的弹性常数恰好就是复合材料的弹性常数。下面我们讨论这一方法在单向排列短纤维增强复合材料中的应用。设复合材料中的基体与纤维的弹性常数张量为 L_2 和 L_1 , 复合材料的有效弹性常数张量为 L 。在自洽模型下,

复合材料中的短纤维可以看作作为嵌入弹性模量为 L 的均匀介质的一个椭圆形夹杂, 这样根据 Eshelby 的等效公式(2.38), 在远场均匀应力 $\bar{\sigma}$ 的作用下夹杂内的应力为

$$\sigma_1 = L(\bar{\epsilon} + \epsilon^* - \epsilon^*) = \bar{\sigma} + L(S - I)\epsilon^* \quad (2.46)$$

这里我们采用张量的简记符号, S 为 Eshelby 张量, I 为四阶单位张量, $\bar{\epsilon}$ 为没有夹杂存在时上述均匀介质中的应变, ϵ^* 和 ϵ^* 分别为夹杂存在引起的扰动应变和本征应变。

为了表征夹杂外部材料对夹杂变形的约束作用, Hill 引入一个约束张量 L^* , 它满足

$$\sigma_1 - \bar{\sigma} = -L^*(\epsilon_1 - \bar{\epsilon}) = -L^*\epsilon^* = -L^*S\epsilon^* \quad (2.47)$$

式中 ϵ_1 为夹杂中的应变。比较式(2.46)与式(2.47), 我们可以得到

$$L^*S = L(I - S) \quad (2.48)$$

由上式可以解得

$$S = PL \quad (2.49)$$

其中

$$P = (L^* + L)^{-1} \quad (2.50)$$

对于两相复合材料, 它们各相的平均扰动应力与平均扰动应变应分别满足自平衡条件

$$\begin{aligned} C_1(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}) + C_2(\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}) &= 0 \\ C_1(\bar{\epsilon}_1 - \bar{\epsilon}) + C_2(\bar{\epsilon}_2 - \bar{\epsilon}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

其中 $\bar{\sigma}_1, \bar{\epsilon}_1$ 与 $\bar{\sigma}_2, \bar{\epsilon}_2$ 分别为夹杂相与基体相中的平均应力和应变, C_1 与 C_2 则为它们的体积比率。因为

$$\bar{\sigma} = L\bar{\epsilon} = L(C_1\bar{\epsilon}_1 + C_2\bar{\epsilon}_2) \quad (2.52)$$

则式(2.51)的第一式可以写作

$$C_1(\bar{\sigma}_1 - L\bar{\epsilon}_1) + C_2(\bar{\sigma}_2 - L\bar{\epsilon}_2) = 0 \quad (2.53)$$

当复合材料中的夹杂相呈单向排列时, 式(2.47)中夹杂内的应力与应变 σ_1 与 ϵ_1 即为 $\bar{\sigma}_1$ 与 $\bar{\epsilon}_1$, 于是我们有

$$\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma} = L^*(\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_1) \quad (2.54)$$

将上式代入式(2.51)中可以得到

$$\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma} = L^* (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_2) \quad (2.55)$$

由此可见在自洽模型下基体相与夹杂相具有完全对等的关系。将关系式

$$\bar{\sigma}_1 = L_1 \bar{\epsilon}_1, \quad \bar{\sigma}_2 = L_2 \bar{\epsilon}_2 \quad (2.56)$$

代入式(2.54)与(2.55)中,就得到

$$(L^* + L_1) \bar{\epsilon}_1 = (L^* + L_2) \bar{\epsilon}_2 = (L^* + L) \bar{\epsilon} = P^{-1} \bar{\epsilon} \quad (2.57)$$

若令

$$\bar{\epsilon}_1 = A_1 \bar{\epsilon}, \quad \bar{\epsilon}_2 = A_2 \bar{\epsilon} \quad (2.58)$$

其中 A_1 与 A_2 被称为“集中因子张量”,它们的逆分别为

$$\begin{aligned} A_1^{-1} &= P(L^* + L_1) = I + P(L_1 - L) \\ A_2^{-1} &= P(L^* + L_2) = I + P(L_2 - L) \end{aligned} \quad (2.59)$$

这样,式(2.53)可以表示成

$$C_1(L_1 - L)A_1 + C_2(L_2 - L)A_2 = 0 \quad (2.60)$$

即

$$C_1[(L_1 - L)^{-1} + P]^{-1} + C_2[(L_2 - L)^{-1} + P]^{-1} = 0 \quad (2.61)$$

将上式求逆后得到

$$C_1(L - L_2)^{-1} + C_2(L - L_1)^{-1} = P \quad (2.62)$$

与上式对偶的关系为

$$C_1(M - M_2)^{-1} + C_2(M - M_1)^{-1} = Q \quad (2.63)$$

其中 M_1, M_2 与 M 分别为 L_1, L_2 与 L 的逆,是材料的柔度张量。同时,有

$$Q = L^* S \quad (2.64)$$

作为一个实例,我们考虑一个球形颗粒增强的各向同性复合材料。在这种情况下,式(2.62)可以分解为体积变形部分及剪切变形部分,它们为

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{K - K_2} + \frac{C_2}{K - K_1} &= \frac{\alpha}{\mu} \\ \frac{C_1}{\mu - \mu_2} + \frac{C_2}{\mu - \mu_1} &= \frac{\beta}{\mu} \end{aligned}$$

其中 α 和 β 如式(2.41)所示,与复合材料的等效泊松比 γ 有关,而 γ 又由其等效体积模量 K 与等效剪切量 μ 决定,即

$$\gamma = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \quad (2.66)$$

因此,式(2.65)与(2.66)构成了确定其等效模量的耦合隐式关系。问题的求解一般需要数值迭代计算。

与文献[4,5]不同的是,Chou^[16]利用这一模型计算了单向短纤维增强复合材料的有效弹性常数,在[16]中,短纤维被简化成椭

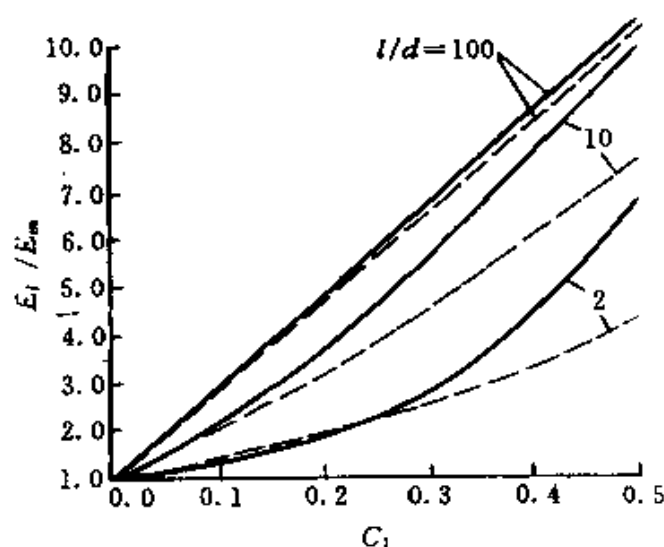


图 2.3 纵向杨氏模量随短纤维体积份数变化曲线^[16]

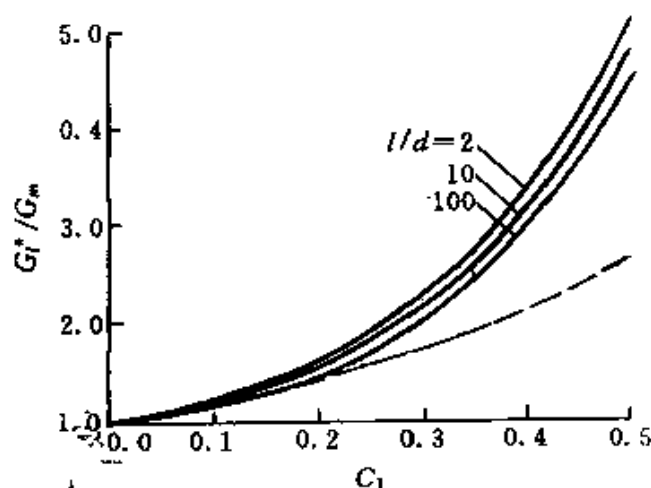


图 2.4 剪切模量随短纤维体积份数变化曲线^[16]

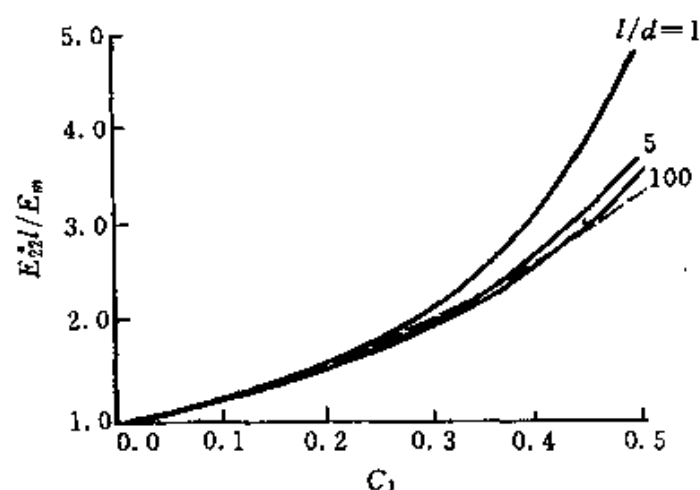


图 2.5 横向杨氏模量与短纤维体积份数变化曲线

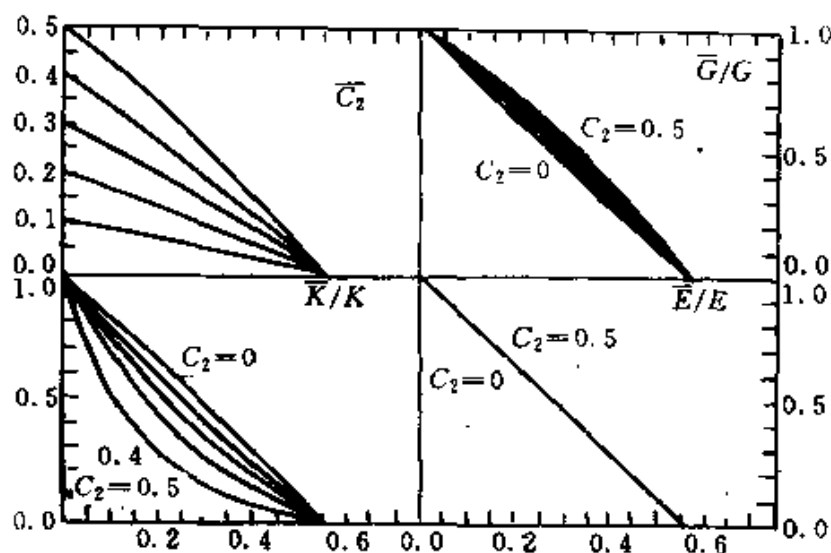


图 2.6 有效弹性模量与张开裂纹密度的关系^[18]

球,而复合材料在宏观上可作为横观各向同性材料。图 2.3—2.5 给出了不同长径比情况下,利用自洽理论与 Hashin-Tsai 方程解出的复合材料杨氏模量 E_1, E_2 , 剪切模量 G_{12} 的比较结果。Wu^[17] 研究了椭球夹杂随机取向复合材料的有效性能。对于含微裂纹的非均匀体,利用自洽模型, Budiansky 和 O'Connell^[18] 计算了微裂纹随机分布且张开时,宏观各向同性非均匀体的有效弹性模量。图

2.6 给出了非均匀体有效弹性模量(泊松比、剪切模量、体积模量和杨氏模量)与张开裂纹(dry cracks)密度之间的变化关系。随着微裂纹密度的增加,非均匀体弹性模量递减,且当裂纹密度达到临界值 $\epsilon=9/16$ 时,弹性模量衰减为零。Horii 和 Nemat-Nasser^[19]研究了微裂纹闭合且具有摩擦时的情况。除了具有宏观各向异性性质外,其有效弹性模量还依赖于加载历史和摩擦系数。图 2.7 给出了随着载荷的变化,微裂纹由闭合至张开各个状态对材料剪切模量的影响,其中 μ 为摩擦系数。图 2.8 是材料剪切模量与微裂纹密度之间的关系。Laws 和 Brockenbrough^[20]还利用自洽模型研究了不同形状和取向的微裂纹对脆性材料刚度性能的影响。图 2.9 显示了随机分布椭圆裂纹对杨氏模量的影响,当椭圆长短轴之比 $b/a=1$ 时,得到的结果与文献[18]一致。图 2.10—2.11 则分别给出了圆币型裂纹单向排列时,材料弹性常数与微裂纹密度之间的变化关系。

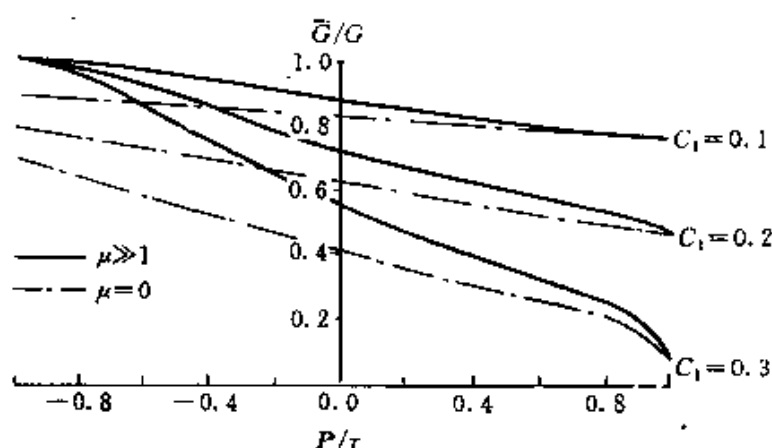


图 2.7 微裂纹体的剪切模量随载荷变化曲线^[19]

需要指出的是,尽管自洽方法能成功地用于多晶体材料的宏观性能的研究,但在将其用于多相(夹杂)复合材料的等效模量的计算时却存在缺陷。例如,Budiansky^[5]指出当离散相为空穴时,按自洽方法计算的等效剪切模量为

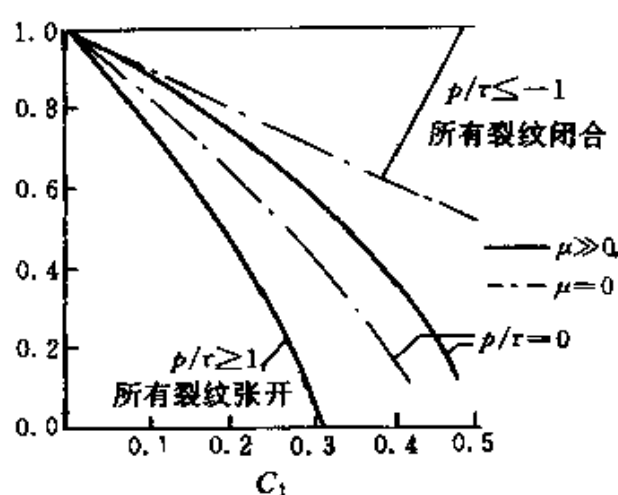


图 2.8 剪切模量随裂纹密度的变化曲线^[19]

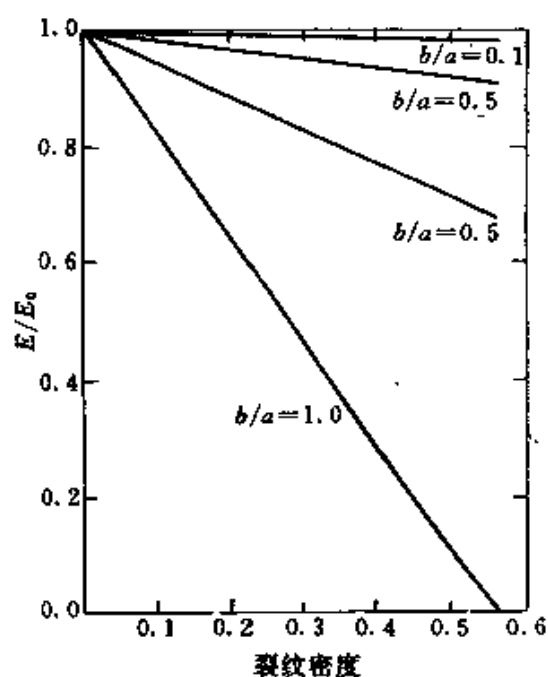


图 2.9 裂纹体的杨氏模量的衰减曲线^[20]

$$\mu = \frac{3(1 - 2C_1)}{1 - C_1} \mu_0 \quad (2.67)$$

其中 C_1 为空穴的体积份数, μ_0 为基体的剪切模量。于是由上式推得, 当 $C_1 = 0.5$ 时, $\mu = 0$ 。显然这个解是错误的。造成这一问题

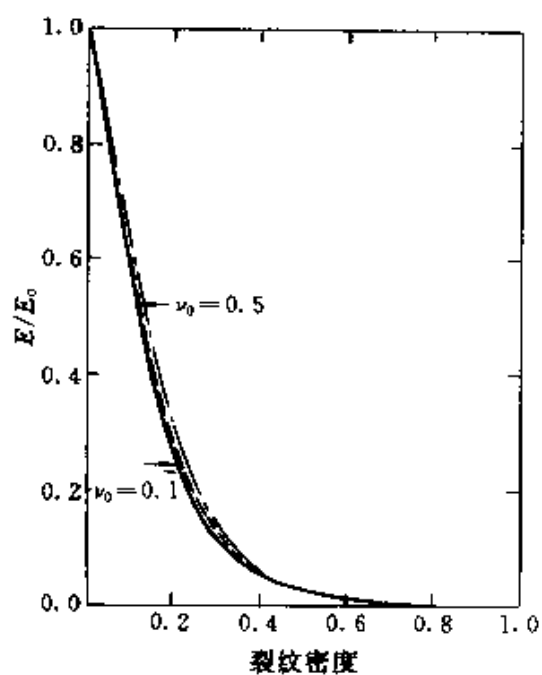


图 2.10 非均匀体弹性模量与微裂纹密度关系^[20]

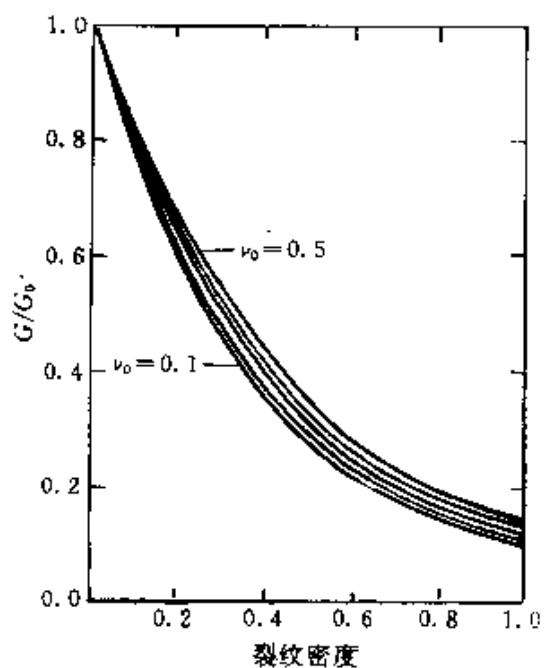


图 2.11 剪切模量与微裂纹密度的关系^[20]

的原因是自洽模型在几何形态上与实际复合材料有较大的差别。

由于自洽模型仅考虑了单夹杂与周围有效介质的作用(见图 2.2), 因而当夹杂体积分数或裂纹密度较大时, 这一模型预报的有效弹性模量过高(含硬夹杂)或过低(含软夹杂)。特别是当夹杂与基体的弹性常数相差较大时, 这一偏差更加显著。对于微裂纹随机取向的非均匀体, 当微裂纹密度为 $9/16$ 时, 自洽模型预报的有效杨氏模量为零, 如图 2.6 所示。为了克服这一弱点, Kerner^[21]提出了广义自洽模型, 如图 2.12 所示, 广义自洽模型是由夹杂、基体壳和有效介质构成的。而夹杂体积与基体壳外边界所围成的体积比恰好是复合材料的夹杂体积份数。与自洽模型一样, 图 2.12 中有效介质的弹性常数与复合材料的相同。采用这一模型 Kerner 给出了求解含球夹杂复合材料的有效体积模量和剪切模量的表达式。Christensen 和 Lo^[22]则在此基础上给出了球形颗粒及长纤维增强复合材料等效剪切模量的计算结果。

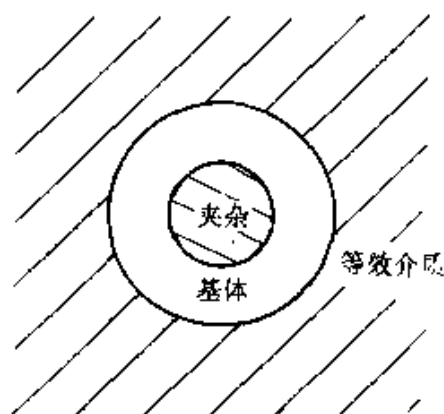


图 2.12 广义自洽模型

与自洽模型相比, 广义自洽模型似乎更合理一些。本文认为其主要原因有两点: (1) 由于广义自洽模型考虑了夹杂、基体壳和有效介质间的相互作用, 因而使得相的“比重”处于平衡, 即有效介质内不仅含有夹杂, 而且夹杂周围还附有一层适当的基体; (2) 广义自洽模型放宽了相之间的界面约束。但是这种模型也带来了解题难度的提高。

最后,应该指出的是尽管自洽模型具有一定的局限性,但其优势是显著的,如在研究各向异性、非线性等问题其求解过程相对来说是简单的。有关自洽理论的综述可参见 Hashin [10],图 2.13 给出了颗粒增强复合材料等效剪切模量的计算实例,其中 $K_f = 40.4\text{GPa}$, $\mu_f = 29.1\text{GPa}$, $K_m = 5.73\text{GPa}$, $\mu_m = 0.593\text{GPa}$, 所得的值位于 Hashin-Shtrikman 的上、下限之间。相应的关于纤维增强复合材料等效弹性模量的计算结果见文献[23]。在这些计算中,数值迭代的收敛速度很快。

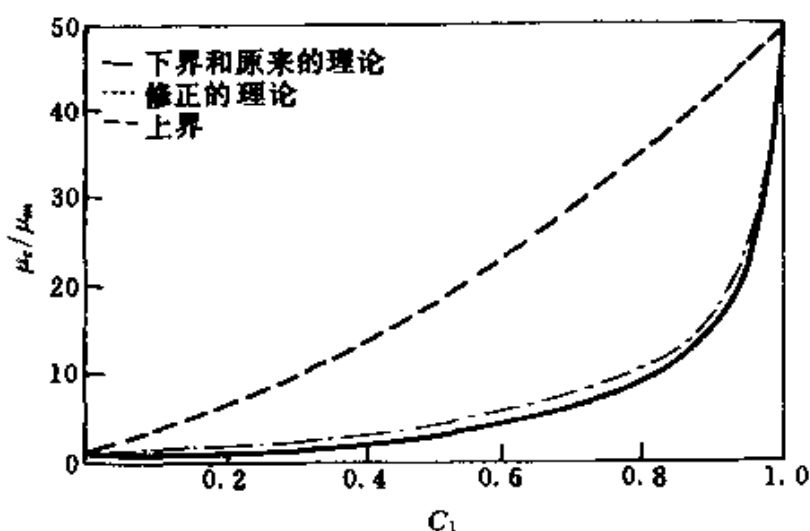


图 2.13 颗粒增强复合材料等效剪切模量[22]

§ 2.4 有效弹性模量的微分法

1952 年 Roscoe^[7]在研究悬浊液体的性质时提出微分等效介质的概念。70 年代 Boucher^[24]与 Mclaughlin^[25]等人发展了这一方法,并将其应用于研究复合材料的有效弹性模量。与自洽理论不同,微分法很难用几何模型来描述,但可以给出一个定性的描述,即复合材料的有效弹性模量是随着夹杂的增减而变化的。下面我们简单介绍这一方法。

微分等效介质理论首先假设有一体积为 V_0 的均质基体材料,

它的弹性常数张量为 L_0 。从这一均匀介质中取出体积为 δV 的材料,同时均匀地在该介质中嵌入同样体积的增强相材料,这时所形成的复合材料的等效弹性模量为 $L_0 + \delta L$,将其用具有相同弹性模量的均匀介质来代替,然后继续上述“取出 - 添入”的过程,直至在复合材料中增强相的含量达到所要求的体积比率为止。

现设在某一时刻复合材料的增强相体积比率为 C_1 ,等效弹性模量为 L ,经过一个取出与添入的过程后 C_1 增至 $C_1 + \delta C_1$,模量 L 增至为 $L + \delta L$ 。在这一时刻,复合材料内的平均应力与平均应变满足如下关系:

$$\bar{\sigma} = (L + \delta L)\bar{\epsilon} \quad (2.68)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{1}{V_0} \int_{V_0 - \delta V} \epsilon dv + \frac{1}{V_0} \int_{\delta V} \epsilon dv \\ \bar{\sigma} &= \frac{1}{V_0} L \int_{V_0 - \delta V} \epsilon dv + \frac{1}{V_0} L_1 \int_{\delta V} \epsilon dv \end{aligned} \quad (2.69)$$

这里 δV 为取出与添入的材料的体积, L_1 为添入的增强相的弹性模量。将式(2.69)代入式(2.68)中可以得到

$$\delta L \bar{\epsilon} = \frac{1}{V_0} \int_{\delta V} (L_1 - L) \epsilon dv \quad (2.70)$$

从上节的讨论中我们知道,当弹性模量为 L_1 的椭球形夹杂嵌入弹性模量为 L 的均匀介质中,在外应变场 $\bar{\epsilon}$ 作用下,夹杂的应变值为

$$\epsilon = A \bar{\epsilon} \quad (2.71)$$

其中 A 为应变集中因子张量,它可通过(2.59)的第一式及式(2.49)给出,即

$$A = [I + SL^{-1}(L_1 - L)]^{-1} \quad (2.72)$$

这样,式(2.70)变为

$$\delta L = (L_1 - L) \bar{A} \frac{\delta V}{V_0} \quad (2.73)$$

式中 $\bar{A}$ 为不同取向的增强相颗粒的 A 值的平均值。

同时,我们注意到在取出与添入 δV 时,取出的部分中含有体

积为 $C_1\delta V$ 的增强相材料,因此在添入 δV 后复合材料中实际的增强相材料体积为

$$V_0(C_1 + \delta C_1) = V_0C_1 + \delta V - C_1\delta V \quad (2.74)$$

经整理为

$$\frac{\delta V}{V_0} = \frac{\delta C_1}{1 - C_1} \quad (2.75)$$

将其代入式(2.73)中,并令 $\delta C_1 \rightarrow 0$,我们得到

$$\frac{dL}{dC_1} = \frac{1}{1 - C_1} (L_1 - L) \bar{A} \quad (2.76)$$

式(2.76)与(2.72)就构成了确定等效弹性模量 L 的微分方程。它们的初始条件为

$$L|_{C_1=0} = L_0 \quad (2.77)$$

同样,用微分法确定复合材料的有效弹性柔度的微分方程为

$$\frac{dS}{dC_1} = \frac{1}{1 - C_1} (S_1 - S) \bar{B} \quad (2.78)$$

$$S|_{C_1=0} = S_0 \quad (2.79)$$

式中 $\bar{B}$ 和 $\bar{A}$ 一样,均可由自洽模型或其他方法确定。

对于球形颗粒增强复合材料,上述微分方程可以化为

$$\frac{dK}{dC_1} = \frac{K_1 - K}{1 - C_1} \frac{K + K^*}{K_1 + K^*} \quad (2.80)$$

$$\frac{d\mu}{dC_1} = \frac{\mu_1 - \mu}{1 - C_1} \frac{\mu + \mu^*}{\mu_1 + \mu^*}$$

其中, K 与 μ 分别为复合材料的体积弹性模量与等效剪切弹性模量, K_1 与 μ_1 为增强相材料的相应弹性模量, K^* 和 μ^* 为引入的约束张量,即

$$K^* = \frac{4}{3}\mu, \mu^* = \frac{1}{6}\mu \frac{9K + 8\mu}{K + 2\mu} \quad (2.81)$$

问题的初始条件为

$$K|_{C_1=0} = K_0, \mu|_{C_1=0} = \mu_0 \quad (2.82)$$

其中 K_0 与 μ_0 为基体材料的体积与剪切弹性模量。

方程(2.80)与(2.81)是高度非线性且耦合的微分方程,求解

比较困难。但是如果我们近似地取

$$K^* = \frac{4}{3}\mu_0, \mu^* = \frac{1}{6}\mu_0 \frac{9K_0 + 8\mu_0}{K_0 + 2\mu_0} \quad (2.83)$$

就可以用分离变量的方法求得微分方程(2.80)的近似显式解为

$$\begin{cases} K = K_0 + \frac{C_1(K_1 - K_0)}{1 + (1 - C_1)(K_1 - K_0)/(K_0 + K^*)} \\ \mu = \mu_0 + \frac{C_1(\mu_1 - \mu_0)}{1 + (1 - C_1)(\mu_1 - \mu_0)/(\mu_0 + \mu^*)} \end{cases} \quad (2.84)$$

利用式(2.76)与(2.77), Hashin^[26]计算了含微裂纹非均匀体的有效弹性模量。从计算结果来看,对于微裂纹随机分布的三维情况,自治理论与微分法之间差别很大。自治理论预报的有效杨氏模量在裂纹密度为 9/16 时降为零,而微分法的结果却随着裂纹密度的增加而逐渐地减小,见图 2.14。对于微裂纹单向排列的平面应力

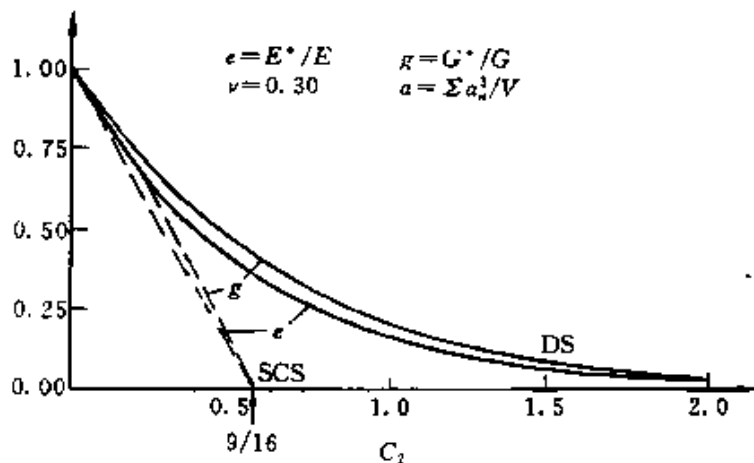


图 2.14 含裂纹体杨氏模量的 DS 与 SCS 计算结果的比较^[25]

问题,上述两种方法所预报的结果差别不大,如图 2.15 所示。比较自治理论和微分法的另一个例子是由 Sayers 和 Kachanov^[27]给出的。他们根据含微裂纹非均匀体势函数^[28,29]的线性展开式计算了微裂纹具有不同取向时非均匀体的有效弹性模量。势函数的线性化忽略了微裂纹之间的相互影响。另外,对于势函数的常数项和线性项系数的确定,[27]分别采用了自治理论和微分法。通过比较,

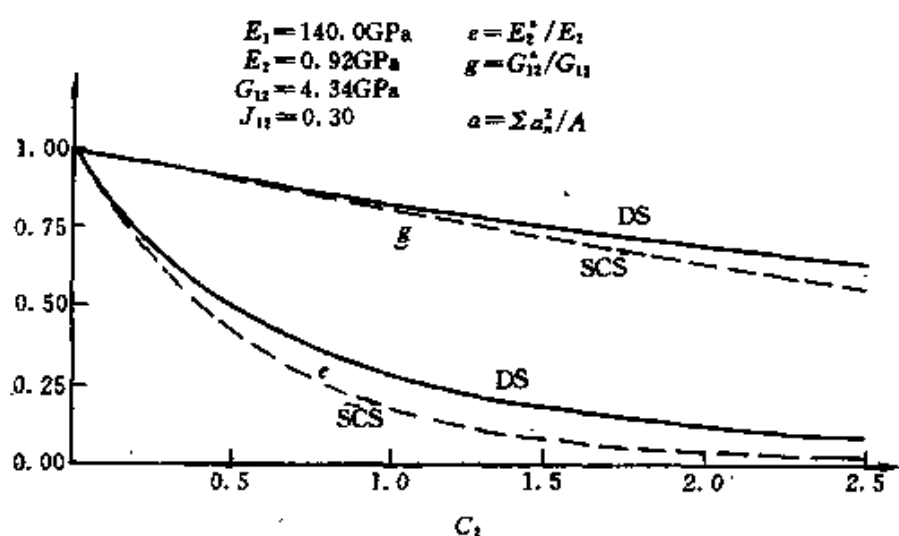


图 2.15 含裂纹体剪切模量的衰减曲线^[25]

文[27]也发现了与[26]同样的现象,即与微分法相比自洽理论过高地估计了微裂纹的相互作用。与[27]相似,Duva 和 Storm^[30]利用复合材料应变率势函数研究了刚性夹杂对幂律材料增强的影响。对于平面应变问题,应变率势函数依赖于一个待定函数,[30]采用微分法确定了这个函数,并给出了线性基体中含圆柱硬夹杂复合材料的本构关系。关于微分法的详细评论及应用文章可参阅[31,32]。

§ 2.5 预报有效弹性模量的 Mori-Tanaka 方法

1973 年 Mori 和 Tanaka^[6]在研究弥散硬化材料的加工硬化时,提出求解材料内部平均应力的背应力方法,即 Mori-Tanaka 法。由于这个方法运算简单,同时在一定程度上计及了复合材料中夹杂相之间的相互作用,近年来受到广泛的应用,成为处理各种非均质复合材料性能的有效手段之一。

设给定的复合材料在其边界上受到远场均匀的应力 σ^0 的作用。另外有一形状相同的均质材料,其弹性性质与上述复合材料的基体弹性性质相同,在同样的外力作用下它的本构关系为

$$\sigma^0 = L_0 \epsilon^0 \quad (2.85)$$

式中 L_0 是基体材料的弹性常数张量。由于夹杂相的存在,实际复合材料基体的平均应变不同于 ϵ^0 , 将由夹杂相间的相互作用产生一个扰动应变 $\tilde{\epsilon}$ 。这样,复合材料基体中的平均应力为

$$\sigma^{(0)} = \sigma^0 + \tilde{\sigma} = L_0(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon}) \quad (2.86)$$

显然,基体中应力的扰动部分为

$$\tilde{\sigma} = L_0 \tilde{\epsilon} \quad (2.87)$$

由于材料弹性性质的差别,在外力场作用下复合材料夹杂相内的平均应力与平均应变又不同于基体内的相应平均值,它们的差值为 σ' 与 ϵ' 。这个在基体平均背应力 $\sigma^0 + \tilde{\sigma}$ 基础上的夹杂的应力扰动问题可以用 Eshelby 等效夹杂原理来处理,即

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= \sigma^0 + \tilde{\sigma} + \sigma' = L_1(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon') \\ &= L_0(\epsilon^0 + \tilde{\epsilon} + \epsilon' - \epsilon^*) \end{aligned} \quad (2.88)$$

其中 L_1 为夹杂相的弹性常数张量, ϵ^* 为夹杂的等效本征应变。 σ' 与 ϵ' 为由于单个夹杂的存在引起的扰动应力与应变。沿用 Eshelby 的推导结果有

$$\epsilon' = S \epsilon^* \quad (2.89)$$

这里 S 为 4 阶 Eshelby 张量,它与基体的弹性性质及夹杂的形状有关。由式(2.86), (2.88)与(2.89)可求得

$$\sigma' = L_0(\epsilon' - \epsilon^*) = L_0(S - I)\epsilon^* \quad (2.90)$$

式中 I 为 4 阶单位张量。

根据式(2.6)的推导,我们知道复合材料的体积平均应力应等于其远场作用的均匀应力 σ^0 , 于是由式(2.7)得

$$\sigma^0 = (1 - C_1)\sigma^{(0)} + C_1\sigma^{(1)} \quad (2.91)$$

其中 C_1 为夹杂相的体积比率。利用式(2.86)与(2.88),我们有

$$\tilde{\sigma} = -C_1\sigma' \quad (2.92)$$

及

$$\tilde{\epsilon} = -C_1(\epsilon' - \epsilon^*) = -C_1(S - I)\epsilon^* \quad (2.93)$$

将式(2.89)与(2.93)分别代入式(2.88)中,可以解得

$$\epsilon^* = A\epsilon^0 \quad (2.94)$$

其中

$$A = \{L_0 + (L_1 - L_0)[C_1 I + (1 - C_1)S]\}^{-1}(L_0 - L_1) \quad (2.95)$$

同样,对于复合材料内部的体平均应变场 $\bar{\epsilon}$ 有

$$\bar{\epsilon} = (1 - C_1)\epsilon^{(0)} + C_1\epsilon^{(1)} = \epsilon^0 + C_1\epsilon^* = (I + C_1A)L_0^{-1}\sigma^0 \quad (2.96)$$

于是就可得到复合材料的等效弹性模量为

$$L = L_0(I + C_1A)^{-1} \quad (2.97)$$

从式中可见,这是一个关于 L 的显函表达式,求解非常简单。下面我们举例说明。

例 1 以球形颗粒增强复合材料为例,由上述 Mori-Tanaka 法得到的等效体积模量 K 与等效剪切模量 μ 为

$$\begin{aligned} \frac{K}{K_0} &= 1 + \frac{C_1(K_1 - K_0)}{K_0 + \alpha(1 - C_1)(K_1 - K_0)} \\ \frac{\mu}{\mu_0} &= 1 + \frac{C_1(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + \beta(1 - C_1)(\mu_1 - \mu_0)} \end{aligned} \quad (2.98)$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{1 + \gamma_0}{1 - \gamma_0}, \beta = \frac{2}{15} \frac{4 - 5\gamma_0}{1 - \gamma_0} \quad (2.99)$$

这里 K_1 与 μ_1 为夹杂相的体积弹性模量与剪切弹性模量, K_0 与 μ_0 , γ_0 分别为基体的体积弹性模量、剪切模量与泊松比。

例 2 对于单向纤维增强复合材料,将纤维束看成圆柱状夹杂。为便于计算,设纤维与基体均是各向同性材料,它们的弹性常数可表示为

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^0 &= \lambda_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_0 \delta_{il} \delta_{jk} \\ C_{ijkl}^1 &= \lambda_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_1 \delta_{il} \delta_{jk} \end{aligned} \quad (2.100)$$

式中 λ_0, μ_0 及 λ_1, μ_1 分别是基体及纤维材料的拉梅常数。显然,单向纤维增强复合材料具有横观各向同性的特点。设坐标轴 1 方向

沿着纤维纵向, 将(2.89), (2.93)与(2.100)式代入到式(2.88)中得

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ B_7 & B_8 & B_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \epsilon_{33}^* \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & 1 & 1 \\ 1 & D_1 & 1 \\ 1 & 1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{33}^0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.101)$$

其中

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 D_1 + D_2 + (1 - C_1)(S_{2211} + S_{3311}) \\ B_2 &= C_1 + D_3 + (1 - C_1)(S_{2222} + S_{3322}) \\ B_3 &= C_1 + D_3 + (1 - C_1)(S_{2233} + S_{3333}) \\ B_4 &= C_1 + D_3 + (1 - C_1)(D_1 S_{2212} + S_{3311}) \\ B_5 &= C_1 D_1 + D_2 + (1 - C_1)(D_1 S_{2222} + S_{3322}) \\ B_6 &= C_1 + D_3 + (1 - C_1)(D_1 S_{2233} + S_{2211}) \\ B_7 &= C_1 + D_3 + (1 - C_1)(D_1 S_{3311} + S_{2211}) \\ B_8 &= C_1 + D_3 + (1 - C_1)(D_1 S_{3322} + S_{2222}) \\ B_9 &= C_1 D_1 + D_2 + (1 - C_1)(D_1 S_{3333} + S_{2233}) \\ D_1 &= 1 + 2(\mu_1 - \mu_0)/(\lambda_1 - \lambda_0) \\ D_2 &= (\lambda_0 + 2\mu_0)/(\lambda_1 - \lambda_0) \\ D_3 &= \lambda_0/(\lambda_1 - \lambda_0) \end{aligned} \quad (2.102)$$

由式(2.101)可以求解出等效本征应变 ϵ_{ij}^* 与外加应变 ϵ_{ij}^0 之间的关系, 即(2.94)式可写成

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* \\ \epsilon_{33}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11}^0 \\ \epsilon_{22}^0 \\ \epsilon_{33}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.103)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= D_1(B_6 B_8 - B_5 B_9) + B_3(B_5 - B_8) + B_2(B_9 - B_6) \\ A_2 &= D_1(B_2 B_9 - B_3 B_8) + B_6(B_8 - B_2) + B_5(B_3 - B_9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= D_1(B_3B_5 - B_2B_6) + B_8(B_6 - B_3) + B_9(B_2 - B_5) \\
A_4 &= D_1(B_4B_9 - B_6B_7) + B_1(B_6 - B_9) + B_3(B_7 - B_4) \\
A_5 &= D_1(B_3B_7 - B_1B_9) + B_4(B_9 - B_3) + B_6(B_1 - B_7) \\
A_6 &= D_1(B_1B_6 - B_3B_4) + B_9(B_4 - B_1) + B_7(B_3 - B_6) \\
A_7 &= D_1(B_5B_7 - B_4B_8) + B_2(B_4 - B_7) + B_1(B_8 - B_5) \\
A_8 &= D_1(B_1B_8 - B_2B_7) + B_5(B_7 - B_1) + B_4(B_2 - B_8) \\
A_9 &= D_1(B_2B_4 - B_1B_5) + B_7(B_5 - B_2) + B_8(B_1 - B_4) \\
A &= B_1(B_5B_9 - B_6B_8) + B_2(B_6B_7 - B_4B_9) \\
&\quad + B_3(B_4B_8 - B_5B_7)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

对于横观各向同性单向纤维增强复合材料的剪切应变分量，由于它们之间不相互耦合，很容易解得

$$\epsilon_{12}^* = \frac{-(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)[C_1 + 2(1 - C_1)S_{1212}]} \epsilon_{12}^0 \tag{2.105}$$

$$\epsilon_{13}^* = \frac{-(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)[C_1 + 2(1 - C_1)S_{1313}]} \epsilon_{13}^0 \tag{2.106}$$

$$\epsilon_{23}^* = \frac{-(\mu_1 - \mu_0)}{\mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)[C_1 + 2(1 - C_1)S_{2323}]} \epsilon_{23}^0 \tag{2.107}$$

我们根据求得的纤维等效本征应变下一步就可以预报单向纤维增强复合材料的弹性模量。

1. 纵向杨氏模量 E_{11}

沿纤维方向作用均匀拉伸应力 σ_{11}^0 ，利用虎克定律可以导出如下关系： $\sigma_{11}^0 = E_{11}\bar{\epsilon}_{11}$ ，其中 $\bar{\epsilon}_{11} = \epsilon_{11}^0 + C_1\epsilon_{11}^*$ ，而对纯基体材料则有 $\sigma_{11}^0 = E_0\epsilon_{11}^0$ ， $\epsilon_{22}^0 = \epsilon_{33}^0 = -\gamma_0\epsilon_{11}^0$ ，比较两式关系，利用(2.103)式得到

$$\frac{E_{11}}{E_0} = \frac{\epsilon_{11}^0}{\epsilon_{11}^0 + C_1\epsilon_{11}^*} = \frac{1}{1 + C_1[A_1 - \gamma_0(A_2 + A_3)]/A} \tag{2.108}$$

2. 横向杨氏模量 $E_{22}=E_{33}$

沿垂直纤维方向上作用均匀拉伸应力 σ_{22}^0 , 对于单向复合材料和纯基体材料分别满足本构关系: $\sigma_{22}^0 = E_{22}\epsilon_{22}$ 和 $\sigma_{22}^0 = E_0\epsilon_{22}^0$, 由上述分析得

$$\frac{E_{22}}{E_0} = \frac{1}{1 + C_1[A_5 - \gamma_0(A_4 + A_6)]/A} \quad (2.109)$$

3. 纵向剪切模量 $\mu_{12} = \mu_{13}$

在沿纤维方向的平面内作用纯剪切应力 σ_{12}^0 , 利用虎克定律得到单向复合材料和纯基体材料中分别存在下列本构关系: $\sigma_{12}^0 = 2\mu_{12}\bar{\epsilon}_{12}$ (式中 $\bar{\epsilon}_{12} = \epsilon_{12}^0 + C_1\epsilon_{12}^*$), 和 $\sigma_{12}^0 = 2\mu_0\epsilon_{12}^0$, 比较两式关系, 利用式(2.105)得

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_0} = 1 + \frac{C_1}{2(1 - C_1)S_{1212} + \mu_0/(\mu_1 - \mu_0)} \quad (2.110)$$

4. 纵向泊松比 $\gamma_{12} = \gamma_{13}$

沿纤维方向作用均匀拉伸应力 σ_{11}^0 , 单向复合材料内部存在 $\bar{\epsilon}_{22} = -\gamma_{12}\bar{\epsilon}_{11}$ 的关系, 其中 $\bar{\epsilon}_{11} = \epsilon_{11}^0 + C_1\epsilon_{11}^*$, $\bar{\epsilon}_{22} = \epsilon_{22}^0 + C_1\epsilon_{22}^*$, 利用式(2.103)和 $\epsilon_{22}^0 = \epsilon_{33}^0 = -\gamma_0\epsilon_{11}^0$ 的关系可得

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma_0 - C_1[A_4 - \gamma_0(A_5 + A_6)]/A}{1 + C_1[A_1 - \gamma_0(A_2 + A_3)]/A} \quad (2.111)$$

5. 横向泊松比 γ_{23}

沿垂直纤维方向作用拉伸应力 σ_{22}^0 , 则复合材料内存在 $\bar{\epsilon}_{33} = -\gamma_{23}\bar{\epsilon}_{22}$ 的关系, 由上述分析得

$$\gamma_{23} = \frac{\gamma_0 - C_1[A_6 - \gamma_0(A_4 + A_5)]/A}{1 + C_1[A_9 - \gamma_0(A_7 + A_8)]/A} \quad (2.112)$$

这样, 我们就求解了单向纤维增强复合材料的等效弹性模量, 由于横观各向同性的特点存在 5 个独立的弹性常数, 即 $E_{11}, E_{22} =$

$E_{33}, \gamma_{12} = \gamma_{13}, \gamma_{23}, \mu_{12}$ 。从分析中发现,它们不仅与各个组分材料的弹性常数有关,还与纤维束的形状、体积份数密切相关。

对于单向短纤维增强复合材料, Taya 和 Mura^[33]研究了在沿纤维方向的均匀应力场作用下纤维端部出现扁平裂纹时的宏观弹性性能和强度问题,如图 2.16。由于问题的复杂性,它的求解仅限于如下情况,即扁平裂纹在基体中扩展但没触及邻近的纤维。对于这种情况,[33]根据 Eshelby 等效夹杂方法和 Mori-Tanaka 背应力法计算了复合材料的有效纵向杨氏模量和裂纹的能量释放率。

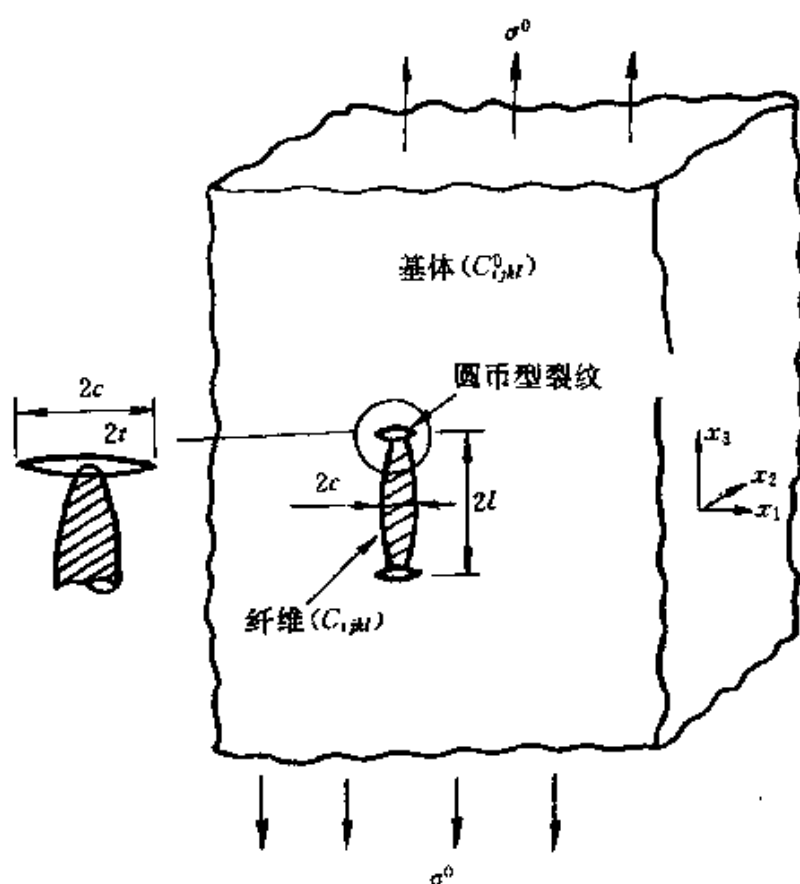


图 2.16 含裂纹单向短纤维增强复合材料示意图^[33]

图 2.17 绘出了复合材料纵向杨氏模量与纤维体积份数的关系曲线。图中 $F_{\max}$ 代表仅考虑短纤维夹杂情况,用混合律方法求解的结果, F 代表 Mori-Tanaka 方法求解的结果, F_c 代表考虑短纤维夹

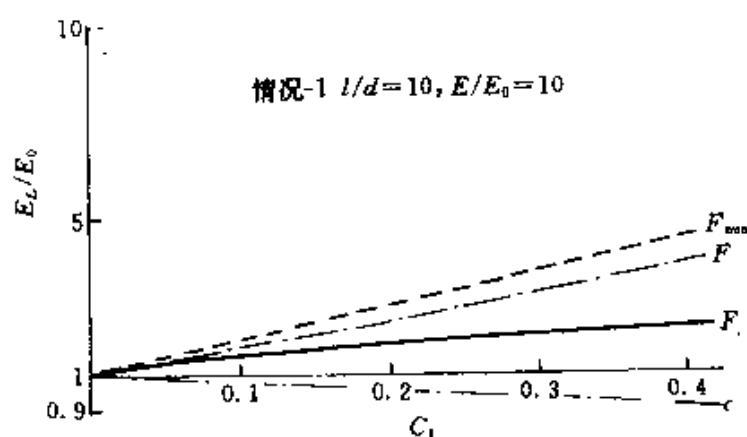


图 2.17 纵向杨氏模量与纤维体积份数的关系^[33]

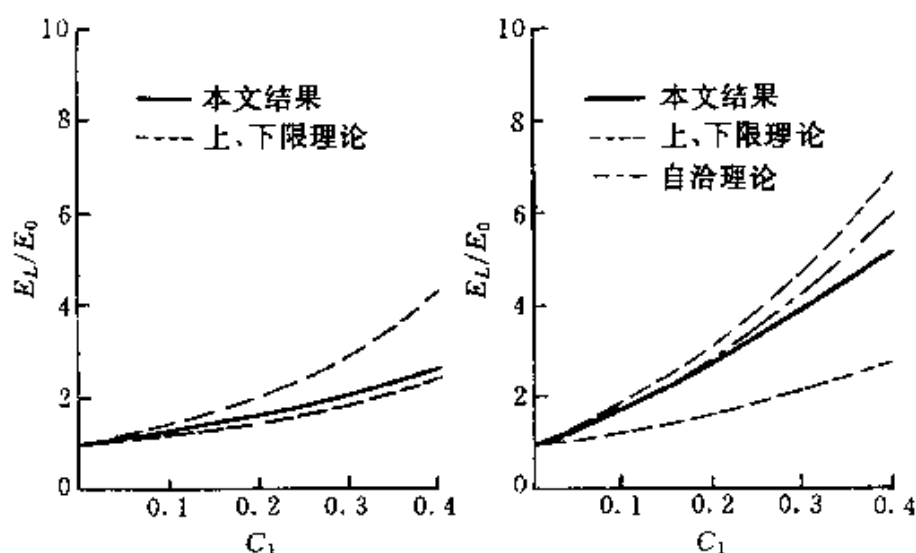


图 2.18 有效纵向杨氏模量与纤维体积份数关系^[34]

杂且存在扁平裂纹情况下 Mori-Tanaka 法计算的结果, C 代表仅存在扁平裂纹时的结果。Takao 等^[34]研究了随机分布短纤维增强复合材料的有效杨氏模量。计算结果与 Chou, Nomura 和 Taya [16, 35] 中的上、下限理论和自治理论进行了比较, 如图 2.18。发现对于短纤维夹杂长径比 $l/r=2$ 的情况, Mori-Tanaka 的结果与下限值很接近, 而长径比 $l/r=\infty$ 时, Mori-Tanaka 的结果较自治方法的计算值低, 说明 Mori-Tanaka 方法考虑夹杂相之间的相互

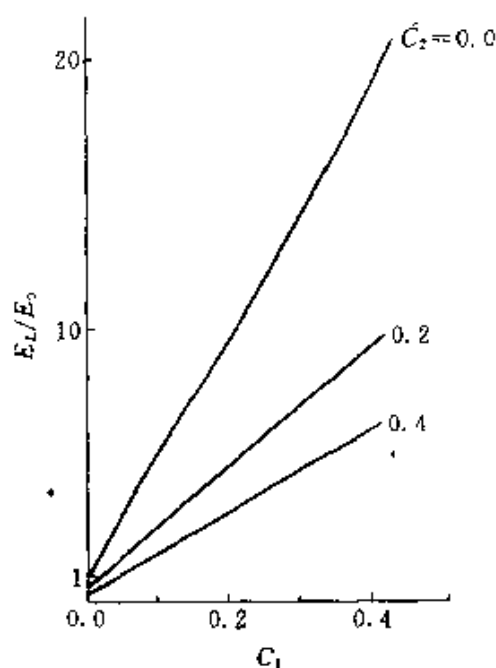


图 2.19 不同微裂纹密度情况下，
纵向杨氏模量与纤维体
积份数关系^[36]

作用较弱。Taya^[36]利用 Mori-Tanaka 方法研究了含圆币型裂纹的单向短纤维增强复合材料的刚度和强度。图 2.19 给出了不同微裂纹密度情况下，复合材料纵向杨氏模量随纤维体积份数的变化曲线，图 2.20 显示了纵向杨氏模量随微裂纹密度的衰减关系。Taya 和 Chou^[37]对于含两种不同介质的椭球夹杂，利用这一模型研究了混杂复合材料 (Hybrid composite) 的有效弹性性能，如图 2.21 所示。计算结果与混合律进行了比较，如图 2.22。杜善义、李文方^[38]针对相变颗

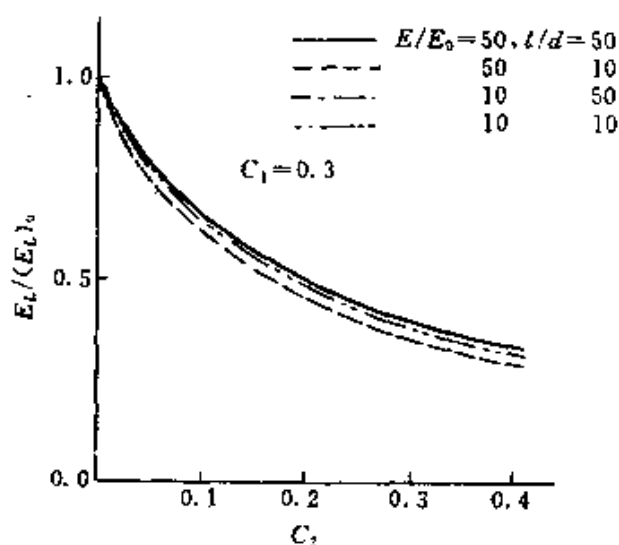


图 2.20 纵向杨氏模量与裂纹密度的关系^[36]

粒增韧陶瓷基复合材料中存在大量微裂纹的现象，利用等效夹杂

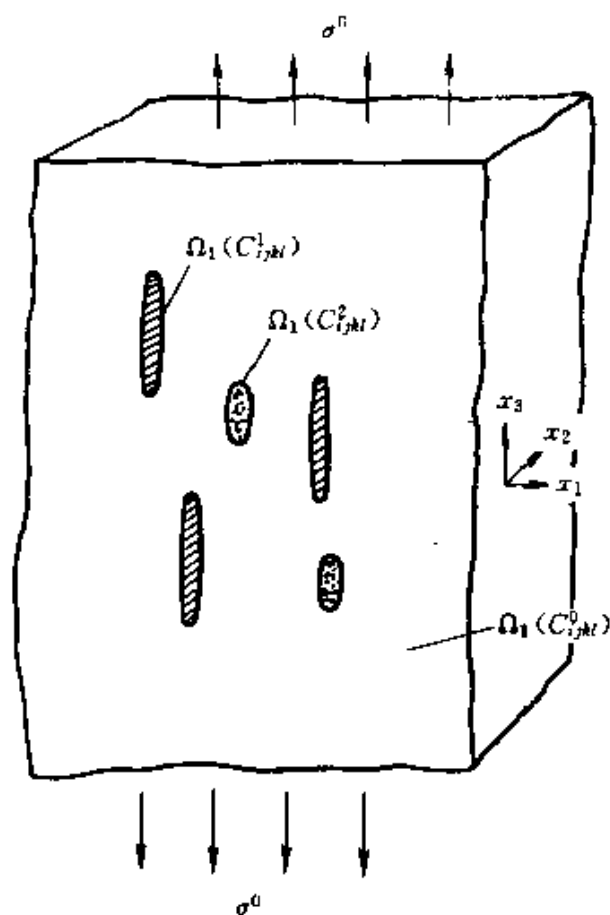


图 2.21 混杂复合材料示意图^[37]

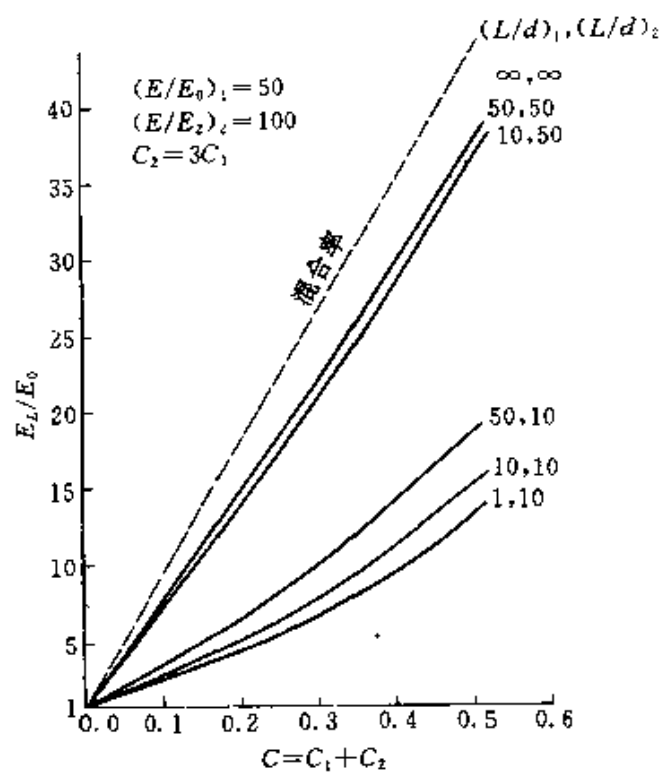


图 2.22 混杂复合材料纵向杨氏模量与夹杂体积份数关系^[37]

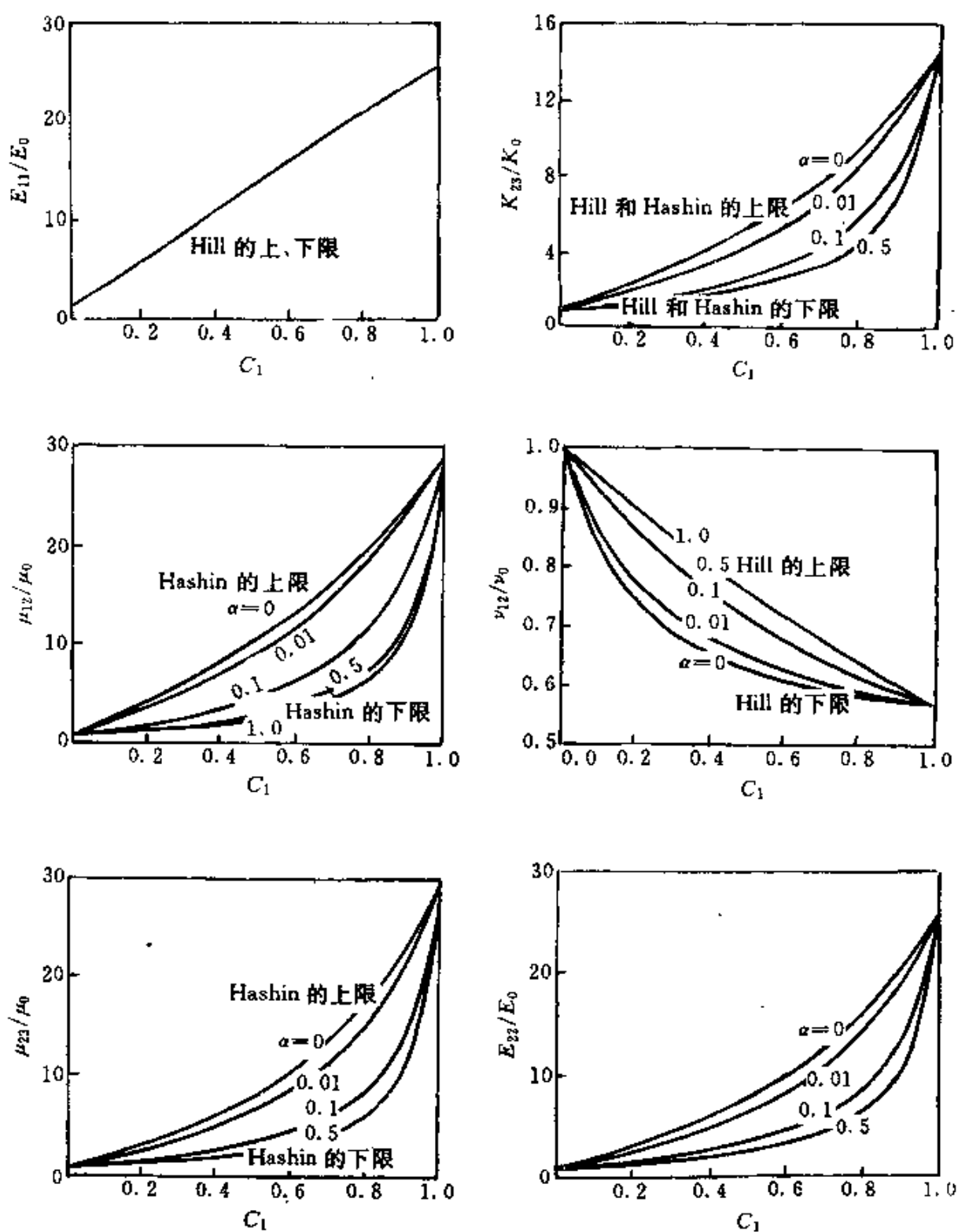


图 2.23 纤维复合材料弹性常数与纤维体积份数关系^[40]

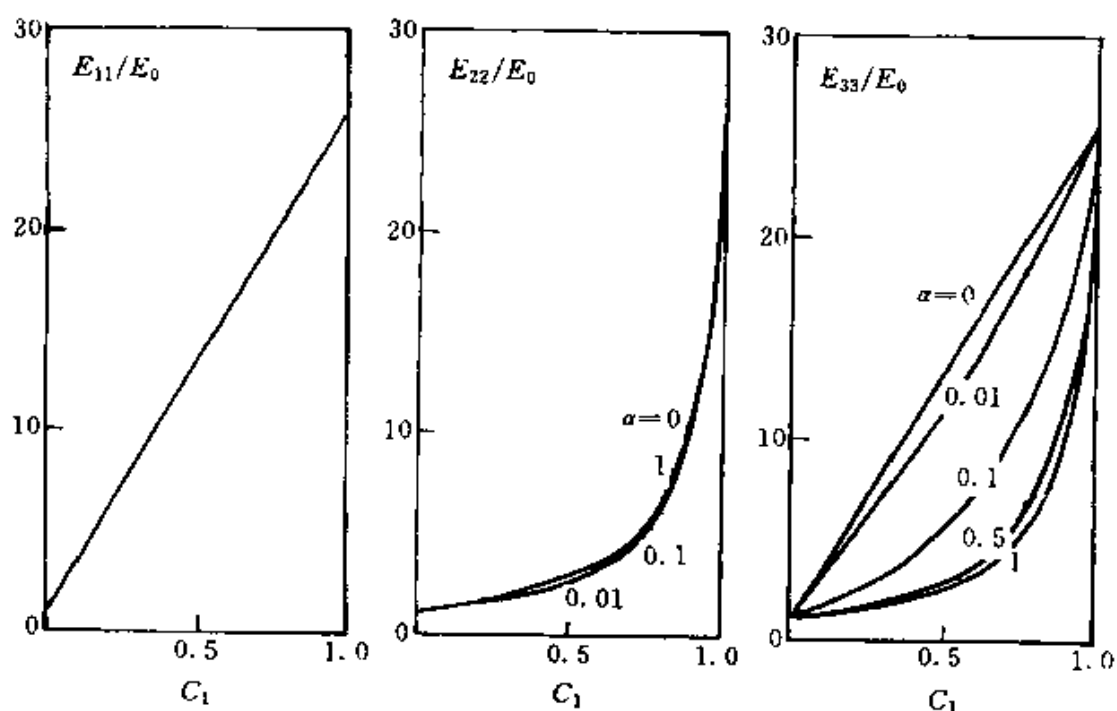


图 2.24 纤维条复合材料杨氏模量与纤维体积份数关系^[40]

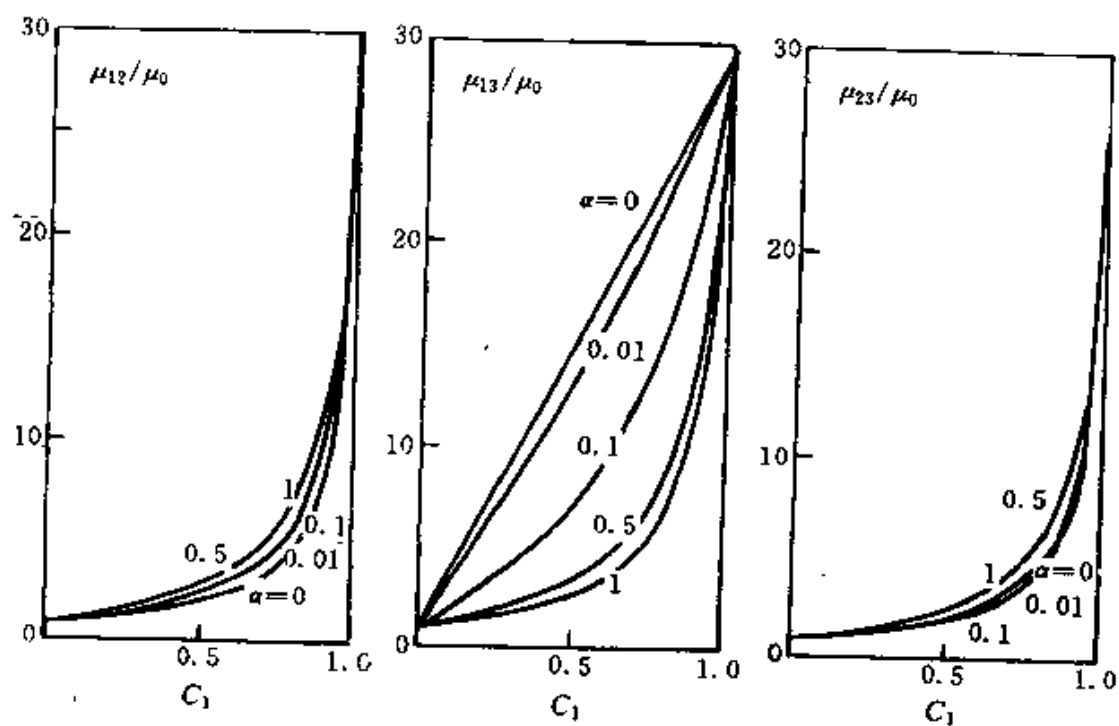


图 2.25 剪切模量与纤维体积份数关系^[40]

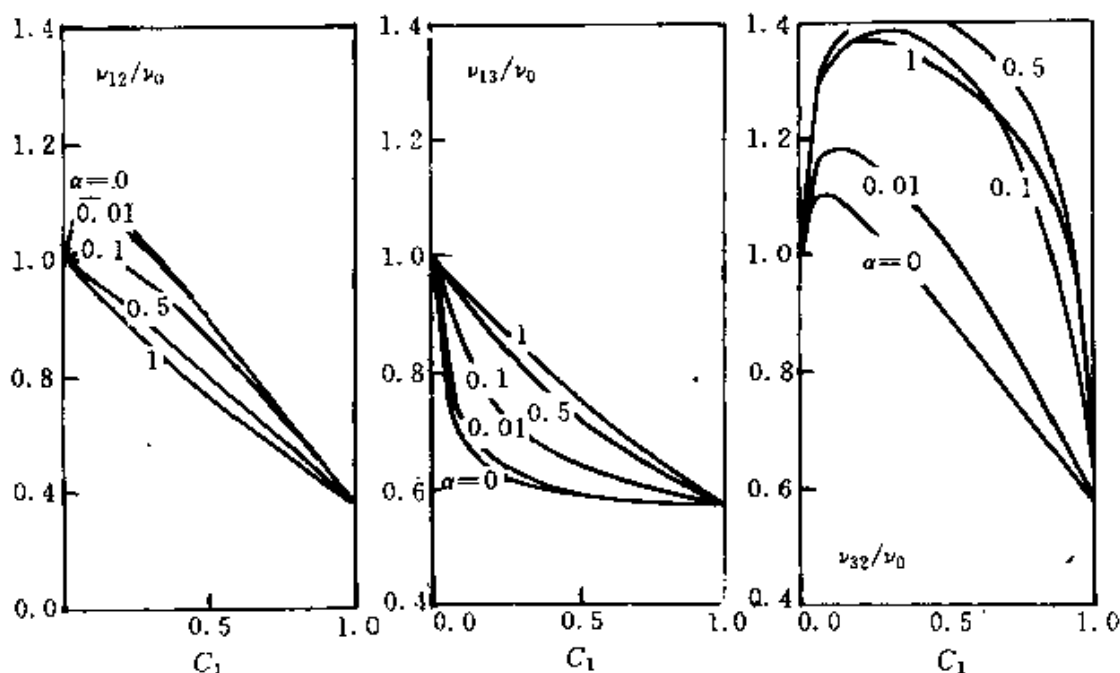


图 2.26 泊松比与纤维体积份数关系^[40]

理论和 Mori-Tanaka 法研究了相变陶瓷中微裂纹对材料强度与刚度的影响。梁军、杜善义^[39]利用等效夹杂理论和改进的刚度平均化方法,研究了含微裂纹和纤维夹杂多相复合材料的有效弹性常数,为优化多相复合材料设计提供了便利手段。

另外,Zhao 和 Weng^[40]也采用 Mori-Tanaka 方法对纤维条(ribbon)增强复合材料的有效弹性模量进行了研究。对于椭圆纤维条随机分布的情况,文献[40]给出了横观各向同性复合材料的 5 个有效弹性常数。当椭圆的短长轴比趋于零时, $\alpha = 0$,其中的 4 个有效弹性常数分别与 Hill^[41] 和 Hashin^[42] 的上限一致。但对于圆柱状纤维条, $\alpha = 1$,上述 4 个常数分别与其下限一致。与此相反,第 5 个有效弹性常数在上述极限下分别对应于下限和上限,如图 2.23 所示。对于椭圆纤维条单向排列的情况,[40] 计算了正交各向异性复合材料的 9 个有效弹性参数。图 2.24 — 2.26 分别给出了杨氏模量(E_{11}, E_{22}, E_{33}),剪切模量($\mu_{12}, \mu_{13}, \mu_{23}$)及泊松比($\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{32}$)与纤维条夹杂体积份数的关系。

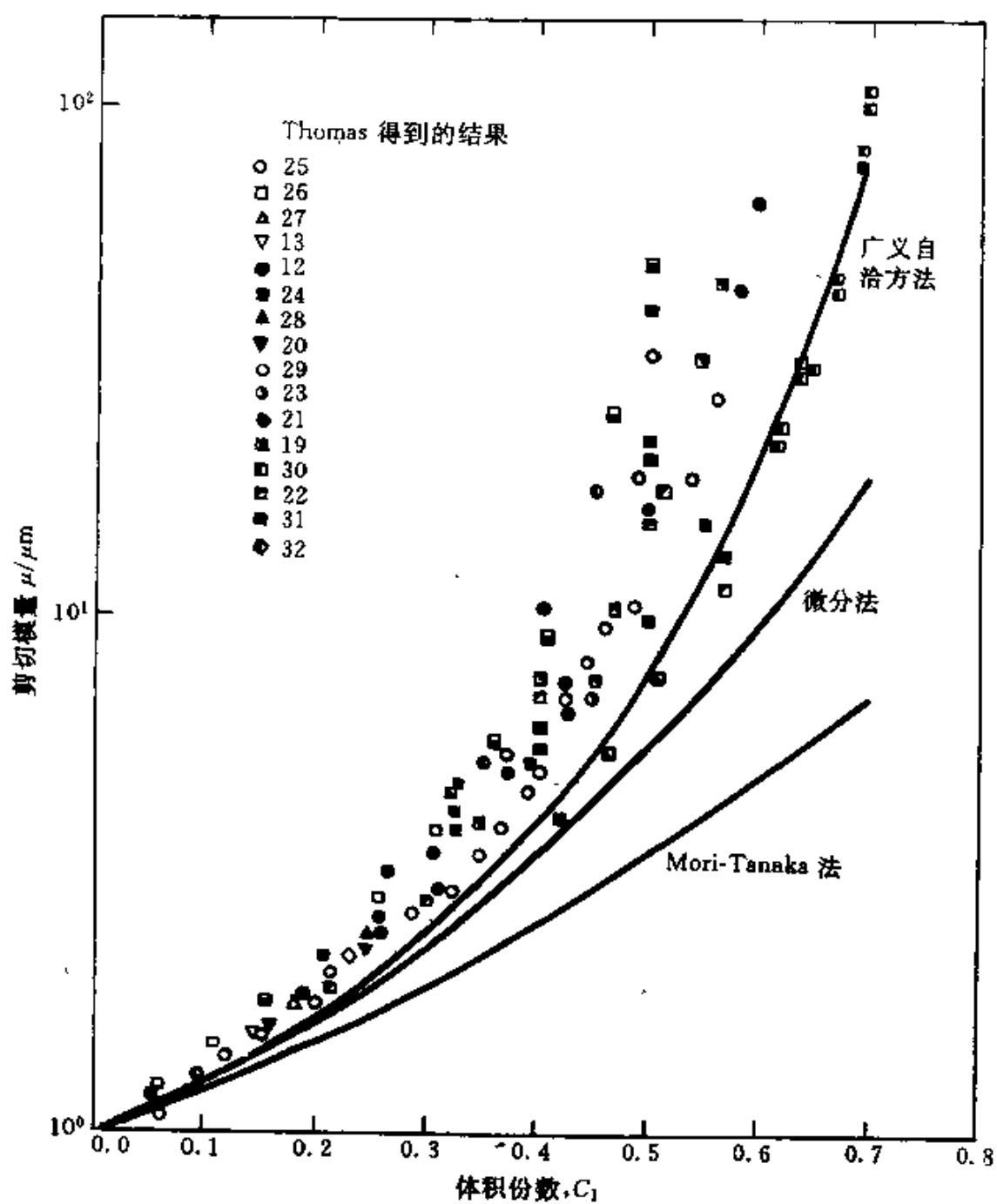


图 2.27 三种方法得到的剪切模量随纤维体积份数变化的比较曲线^[32]

从上面的分析可见, Mori-Tanaka 方法在一定程度上反映了随机分布的夹杂之间的相互作用, 同时其方法简便、概念明确, 因

而在细观力学中获得许多应用。但应该指出,在这一方法中 Eshelby 张量 S 是为嵌入无限大基体的单个夹杂建立的,而对于具有有限夹杂体积含量的复合材料来说,包围每一个夹杂的,实际上是基体与其它夹杂的混合物,因此说 Mori-Tanaka 法计及夹杂相之间的相互作用较弱。Luo^[23]利用三相模型讨论了具有有限体积含量增强相的复合材料的 Eshelby 张量问题,修正了 Mori-Tanaka 方法。对于中度或中度以上体积含量的情况,所得结果与仅适用于低体积含量的二相模型的结果有可观的差别。有关自洽理论、微分法和 Mori-Tanaka 法的比较可见[32]。图 2.27 清楚地给出了三种方法对等效剪切模量的计算值与实验数据的对照曲线,其中广义自洽模型(三相模型)的结果与实验点吻合较好,说明它能够较真实地反映出含夹杂非均匀介质的微结构特征。

§ 2.6 复合材料有效弹性模量的上、下限

§ 2.6.1 Voigt 和 Reuss 的上、下限

计算复合材料等效弹性模量的最为简单的方法是所谓的混合律。混合律的基础就是 Voigt^[43]的等应变假设与 Reuss^[44]的等应力假设。Voigt 等应变假设认为,复合材料的各组分相中的应变是相等的,等于外加应变 ϵ_{ij}^0 。Reuss 的等应力假设则认为,根据边界条件(2.2)式,复合材料内的应力是均匀的,其值为 σ_{ij}^0 。

早在 1889 年 Voigt 就根据晶体内常应变假设研究了多晶体有效模量的问题。设复合材料的各组成相都是各向同性材料,给定远场应变为 ϵ_{ij}^0 ,由式(2.7)我们得到复合材料的有效体积模量 K_v^* 和剪切模量 G_v^* 为

$$K_v^* = \sum_{i=0}^N C_i K_i \quad (2.113)$$

$$G_v^* = \sum_{i=0}^N C_i G_i \quad (2.114)$$

式中 K_i, G_i 和 C_i 分别为第 i 相材料的体积模量、剪切模量和体积分

数, 而 N 为相的数目。同样, 在给定远场应力 σ_{ij}^0 的情况下, 根据 Reuss 假设以及式(2.8), 我们有

$$K_R^* = \left(\sum_{i=0}^N \frac{C_i}{K_i} \right)^{-1} \quad (2.115)$$

$$G_R^* = \left(\sum_{i=0}^N \frac{C_i}{G_i} \right)^{-1} \quad (2.116)$$

式中 K_R^* 和 G_R^* 分别为 Reuss 理论中多晶体的有效体积模量和剪切模量。可以看出, Voigt 近似与 Reuss 近似分别对应于刚度系数与柔度系数的混合律。一般来说, 混合律给出的解是比较粗糙和近似的, 但是它也能适用于某些场合。例如对于长纤维增强复合材料沿纤维方向的拉伸刚度, Voigt 假设能给出较为令人满意的结果。

针对式(2.113)–(2.116), Hill^[45]根据弹性极值原理证明了式(2.113)和式(2.114)为多晶体有效体积模量和剪切模量的上限, 而式(2.115)和式(2.116)为下限。同样, 对于夹杂复合材料, Paul^[46]根据最小势能和最小余能原理也证明了文献[45]中的结论, 但在[46]中要求复合材料具有宏观统计均匀性和各向同性的性质。下面我们就从能量原理出发证明 Voigt 近似解与 Reuss 近似解分别对应于真实弹性解的上、下限。

根据位移边界条件(2.1), 复合材料代表性单元的内力势能为

$$\Pi = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl}^0 v \quad (2.117)$$

根据等应变假设, 势能的 Voigt 近似值为

$$\Pi_v = \frac{1}{2} C_{ijkl}^v \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl}^0 v \quad (2.118)$$

其中

$$C_{ijkl}^v = \frac{1}{v} \int_v C_{ijkl} dv = \sum_{r=0}^N C_r C_{ijkl}^{(r)} \quad (2.119)$$

式中上标 (r) 代表复合材料的第 r 种组分。根据最小势能原理, 我们有

$$\frac{1}{2} (C_{ijkl}^* - C_{ijkl}^v) \epsilon_{ij}^0 \epsilon_{kl}^0 \leq 0 \quad (2.120)$$

因为 ϵ_{ij}^0 可以任意给定, 于是有

$$C_{ijkl}^* \leq C_{ijkl}^v \quad (2.121)$$

同理, 根据应力边界条件(2.2)式, 复合材料代表性单元的余能为

$$n_C = \frac{1}{2} S_{ijkl}^* \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 v \quad (2.122)$$

在等应力假设下, 余能的 Reuss 近似值为

$$n_R = \frac{1}{2} S_{ijkl}^R \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 v \quad (2.123)$$

其中

$$S_{ijkl}^R = \frac{1}{v} \int_v S_{ijkl} dv = \sum_{r=0}^N C_r S_{ijkl}^{(r)} \quad (2.124)$$

根据最小余能原理就可以得到

$$S_{ijkl}^* \leq S_{ijkl}^R \quad (2.125)$$

即

$$C_{ijkl}^R \leq C_{ijkl}^* \quad (2.126)$$

其中

$$C_{ijkl}^R = (S_{ijkl}^R)^{-1} \quad (2.127)$$

这样, 从式(2.121)与式(2.126), 我们证明了 Voigt 和 Reuss 近似解与材料真实弹性解的上、下限关系。

§ 2.6.2 Hashin 和 Shtrikman 的上、下限

对于各向异性非均匀体, Hashin 和 Shtrikman^[49]采用变分法研究了应变能的极值条件。其基本思想是: (1) 选择一个几何形状和边界条件都相同的参考介质, 但该介质是各向同性的均匀体; (2) 将非均匀体的位移场、应力场和弹性模量分解成相应的参考介质的质量和扰动量; (3) 通过边界条件和内部的约束条件给出非均匀体应变能的极值条件。根据这一思想, Hashin 和 Shtrikman^[8]研究了多相复合材料有效弹性模量的上、下限问题。

设有一 n 相统计均匀各向同性复合材料, 它的第 r 相的体积

与弹性模量分别为 V_r 与 $L_r (r = 1, 2, \dots, n)$ 。取一均匀的各向同性比较材料, 它的弹性模量为 L_0 , 它与上述复合材料都受到相同的远场均匀位移边界条件的作用。根据前面的讨论, 我们知道, 只要在该比较材料中作用适当的分布体力, 复合材料中的弹性场就可以在该比较材料中实现。现在设在上述位移边界条件下比较材料的应变场为 ϵ , 相应的满足自平衡条件的应力场为

$$\sigma^* = L_0 \epsilon + \tau \quad (2.128)$$

这里 τ 称为应力极化 (polarization) 张量, 它与比较材料内的分布体力有关。显然, 如果在第 r 相中极应力为 $\tau = (L_r - L_0)\epsilon$, 上述应力与应变场 σ^* 与 ϵ 就是问题的精确解, 否则与 τ 对应的 σ^* 与 ϵ 为近似场。一般来说, 要得到精确的应力与应变场是相当困难的, 特别是在除了夹杂相的体积比率外, 不知道复合材料内部夹杂的具体分布形态的情况下更是如此。这时我们可引入近似, 假设极应力 τ 是分片均匀的, 在体积 V_r 内有

$$\tau_r = (L_r - L_0)\bar{\epsilon}_r \quad (2.129)$$

其中 $\bar{\epsilon}_r$ 为 ϵ 在 V_r 内的平均值。将上式代入式 (2.128) 中, 在 V_r 内我们有

$$\sigma_r^* = L_r \bar{\epsilon}_r + L_0 \epsilon'_r \quad (2.130)$$

其中 $\epsilon'_r = \epsilon - \bar{\epsilon}_r$ 。

根据最小势能原理, 对于任意给定的满足位移边界条件的应变场 ϵ 我们有

$$V = \frac{1}{2} \bar{\epsilon} L \bar{\epsilon} V \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \epsilon L_r \epsilon dv \quad (2.131)$$

上式中 $\bar{\epsilon}$ 为复合材料的平均应变, L 为它的等效弹性模量。

根据虚功原理, 我们有恒等式

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma^* (\bar{\epsilon} - \epsilon) dv = 0 \quad (2.132)$$

这样在式 (2.131) 的右边叠加式 (2.132) 的左端项并不改变不等式的值。利用式 (2.130) 并经过一系列运算可以得到

$$\frac{1}{2} \bar{\epsilon} L \bar{\epsilon} V \leq \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N v_r \bar{\epsilon}_r L_r \bar{\epsilon}_r - \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \int_{V_r} \epsilon'_r (L_0 - L_r) \epsilon'_r dv \quad (2.133)$$

引入应变集中因子 $\bar{A}_r$, 使

$$\bar{\epsilon}_r = \bar{A}_r \bar{\epsilon} \quad (2.134)$$

显然我们有

$$\sum_{r=1}^N C_r \bar{A}_r = I \quad (2.135)$$

式中 I 为单位张量, 于是式(2.133)可以表示为

$$\bar{\epsilon}(L - \bar{L})\bar{\epsilon} \leq -\frac{1}{v} \sum_{r=1}^N \int_{v_r} \epsilon'_r (L_0 - L_r) \epsilon'_r dv \quad (2.136)$$

其中

$$\bar{L} = \sum_{r=1}^N C_r L_r \bar{A}_r \quad (2.137)$$

由上式可见, 若 L_0 足够大, 使 $L_0 - L_r (r=1, 2, \dots, n)$ 半正定, 那么就恒有 $L \leq \bar{L}$; 反之若 L_0 足够小, 使 $L_0 - L_r$ 半负定, 便有 $L \geq \bar{L}$ 。

下面我们来确定在近似极应力 τ 场下复合材料的应变 ϵ 。由于 σ^* 是自平衡的应力场, 由式(2.128)可知求解与 ϵ 所对应的位移场即相当于求解在比较材料内作用有分布体力 $\tau_{i,j}$ 的问题。我们将与近似场 τ 对应的位移记为 $\hat{u}$ 。利用各向同性材料的 Kelvin 格林函数解 $G_{ij}(x, x')$, 可以将 $\hat{u}$ 表示成如下的积分:

$$\hat{u}_i(x) = \int_v G_{ij} \tau_{jk,k} dv \quad (2.138)$$

与此同时, 为确保外部的位移边界条件能得到满足, 需要在与 $\hat{u}_i$ 对应的近似应变场上叠加一均匀的应变场 ϵ^I , 使

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) + \epsilon^I_{ij} \quad (2.139)$$

将分片均匀的极应力场 τ 代入到式(2.138)与(2.139)中, 经过一系列运算可以证明

$$\bar{\epsilon}_r = -P_0 \tau_r + \epsilon^I = P_0 (L_0 - L_r) \bar{\epsilon}_r + \epsilon^I \quad (2.140)$$

这里

$$P_0 = (L_0^* + L_0)^{-1} \quad (2.141)$$

$$L_0^* = K_0^* \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_0^* (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (2.142)$$

式中

$$K_0^* = \frac{4}{3}\mu_0, \mu_0^* = \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{10}{9k_0 + 8\mu_0}\right)^{-1} \quad (2.143)$$

K_0 与 μ_0 是比较材料的体积弹性模量与剪切模量。由式(2.140)可以解得

$$\bar{\epsilon}_r = A_r \epsilon^I \quad (2.144)$$

其中

$$A_r = [I + P_0(L_r - L_0)]^{-1} \quad (2.145)$$

这样,复合材料的体平均应变为

$$\bar{\epsilon} = \sum_{r=1}^N C_r \bar{\epsilon}_r = \sum_{r=1}^N C_r A_r \epsilon^I \quad (2.146)$$

由此可得

$$\epsilon^I = \left(\sum_{r=1}^N C_r A_r\right)^{-1} \bar{\epsilon} \quad (2.147)$$

将上式代回到式(2.144)中,并与式(2.134)进行比较,便有

$$\bar{A}_r = A_r \left(\sum_{r=1}^N C_r A_r\right)^{-1} \quad (2.148)$$

于是根据式(2.137),我们得到

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \sum_{r=1}^N C_r L_r A_r \left(\sum_{r=1}^N C_r A_r\right)^{-1} \\ &= \sum_{r=1}^N C_r (L_0^* + L_r) A_r \left(\sum_{r=1}^N C_r A_r\right)^{-1} - L_0^* \end{aligned} \quad (2.149)$$

另一方面,将式(2.141)代入式(2.145)中,经恒等变换后不难证明

$$(L_0^* + L_r) A_r = L_0^* + L_0 \quad (2.150)$$

利用这一结果,最后式(2.149)可简化为

$$\bar{L} = \left[\sum_{r=1}^N C_r (L_0^* + L_r)^{-1}\right]^{-1} - L_0^* \quad (2.151)$$

各向同性组分材料的弹性常数张量 L_0 和 L_r 可以由它们的体积弹性模量和剪切弹性模量 K_0, μ_0 与 K_r, μ_r 来表示。若我们取 K_0 等于各相材料中 K_r 的最大值,即 $K_{\max}$, μ_0 等于各相材料中 μ_r 的最大值,即 $\mu_{\max}$,那么由式(2.151)得到复合材料的等效体积弹性模量 K 与等效剪切模量 μ 的上限值为

$$\begin{aligned} K &\leq \left[\sum_{r=1}^N C_r (K_0^* + K_r)^{-1} \right]^{-1} - K_0^* \\ \mu &\leq \left[\sum_{r=1}^N C_r (\mu_0^* + \mu_r)^{-1} \right]^{-1} - \mu_0^* \end{aligned} \quad (2.152)$$

式中

$$\begin{cases} K_0^* = \frac{4}{3} \mu_{\max} \\ \mu_0^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_{\max}} + \frac{10}{9K_{\max} + 8\mu_{\max}} \right) \end{cases} \quad (2.153)$$

同理,若取 K_0 与 μ_0 分别等于复合材料各相中最小的 K_r 与 μ_r 值,即 $K_0 = K_{\min}$ 与 $\mu_0 = \mu_{\min}$,就可以得到 K 与 μ 的下限值为

$$\begin{aligned} K &\geq \left[\sum_{r=1}^N C_r (K_0^* + K_r)^{-1} \right]^{-1} - K_0^* \\ \mu &\geq \left[\sum_{r=1}^N C_r (\mu_0^* + \mu_r)^{-1} \right]^{-1} - \mu_0^* \end{aligned} \quad (2.154)$$

这里

$$\begin{cases} K_0^* = \frac{4}{3} \mu_{\min} \\ \mu_0^* = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\mu_{\min}} + \frac{10}{9K_{\min} + 8\mu_{\min}} \right) \end{cases} \quad (2.155)$$

式(2.152)和式(2.154)是由 Walpole^[47,48]根据极值原理并采用格林函数和势函数推导的 Hashin-Shtrikman^[8]的上、下限公式。与上节讨论的 Voigt 与 Reuss 上、下限相比,上述 Hashin-Shtrikman 上、下限的精度明显大为提高,是目前较为理想的上、下限公式。

与[9,47,48]相似,Willis^[49]也采用极化张量概念研究了各向异性复合材料有效弹性模量的上、下限,且给出了 Hashin-Shtrikman 上、下限的推广形式(张量表达式)。Kröner^[50]也推广了 Hashin 和 Shtrikman 的上、下限理论,对于线弹性非均匀体,Dederichs 和 Zeller^[51]发展了一种奇数阶有效弹性模量的上、下限理论,在此基础上,[50]将其理论推广到偶数阶的情况。之后,Nomu-

ra 和 Chou^[52]采用局部应变场的格林函数摄动展开级数计算了横观各向同性短纤维增强复合材料有效弹性模量的上、下限。对于纵向杨氏模量和剪切模量,图 2.28—2.29 分别给出了它与自洽方

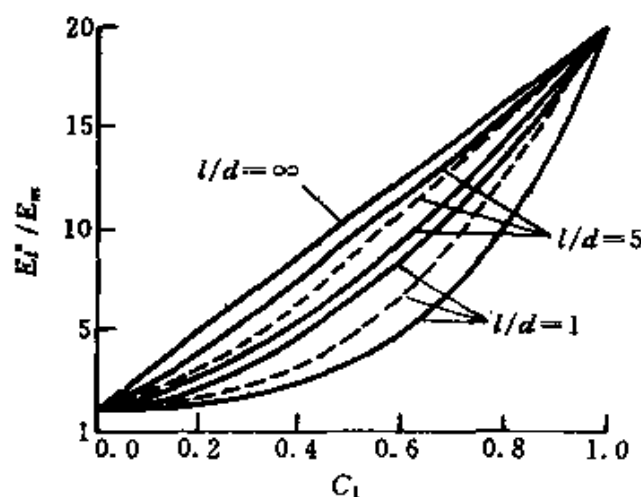


图 2.28 纵向杨氏模量与纤维体积份数的上、下限值^[52]

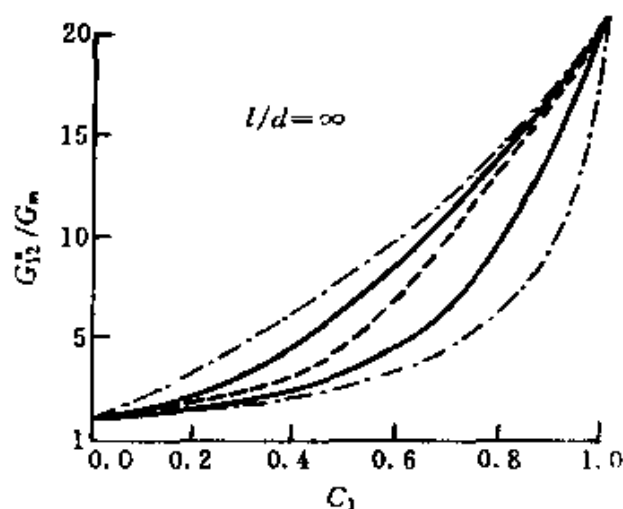


图 2.29 剪切模量与纤维体积份数的上、下限^[52]

法、Hashin-Shtrikman 理论的比较结果。从图中实线可以看出, [52]中材料弹性常数不仅与夹杂相的几何形状有关,而且较 Hashin-Shtrikman 的上、下限有所精化。最近, Tolonen 和 Sjolind 在文献[53]中对 Voigt 和 Reuss 上、下限, Hashin-Shtrik-

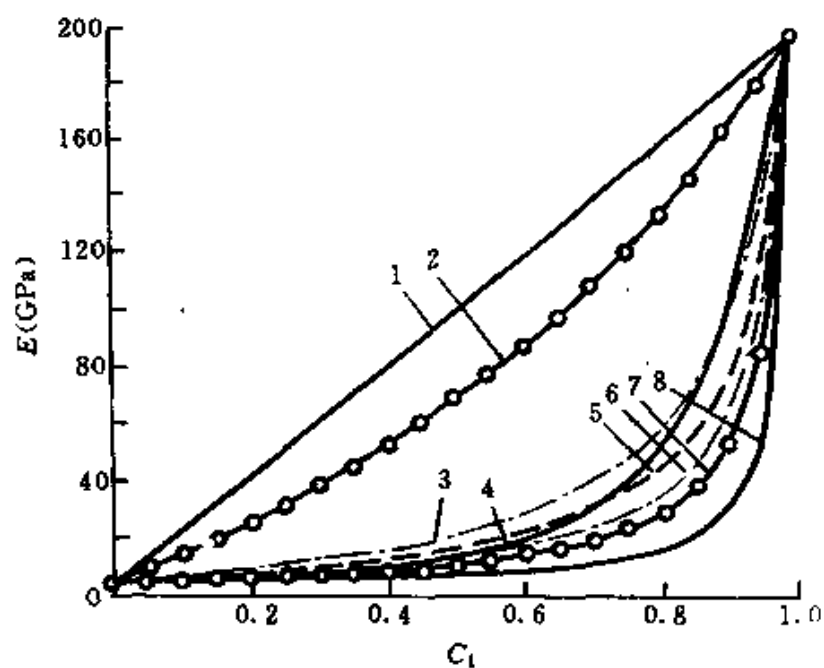


图 2.30 短纤维复合材料杨氏模量与纤维体积份数的关系^[53]

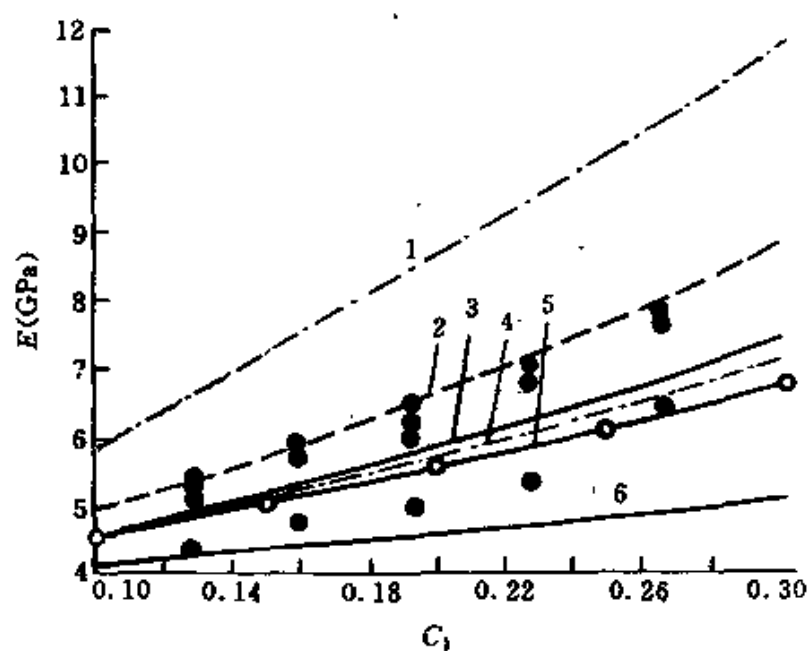


图 2.31 各种方法计算值与实验值的比较曲线^[53]

man 上、下限、微分法和广义自洽理论等进行了评述和对照，如

图 2.30 所示。并且,在夹杂体积含量较小的情况,与实验值进行了比较,如图 2.31,从而使我们清楚地看到各种方法精度和收敛范围。有关 Hashin 和 Shtrikman 的上、下限及其推广形式的评论文章可见[10,54,55]。

§ 2.7 复合材料的热膨胀系数预报

如果复合材料内部的基体与夹杂材料热膨胀系数不同,即使整个物体的温度变化相同,也会因热膨胀系数失配而产生本征应变(热应变),在 § 2.2.2 中我们把这类夹杂叫作 2 类等效夹杂。热膨胀系数不同于其它热物理性能(如热传导、比热容等),它不仅与材料自身的热性能有关,而且还与材料的刚度变化密切相关,因此预报起来更加困难。下面我们就以单向纤维增强复合材料为例,利用 Eshelby-Mori-Tanaka 法来预报它的等效热膨胀系数。

设复合材料中纤维和基体组分的弹性常数张量分别为 L_1 与 L_0 ,它们的热膨胀系数为 α^1 和 α^0 。当复合材料内部温度均匀变化 ΔT 后,由于纤维和基体材料的热膨胀系数失配而产生热应力,根据前面的分析,我们知道在基体中的平均应力 σ^m 为

$$\sigma^m = L_0 \tilde{\epsilon} \quad (2.156)$$

式中 $\tilde{\epsilon}$ 是基体与纤维,纤维与纤维之间相互作用引起的扰动应变。

同样,由 Eshelby 等效夹杂法和 Mori-Tanaka 法得到纤维夹杂中的平均应力 σ^f 为

$$\sigma^f = L_1(\tilde{\epsilon} + \epsilon' - \alpha^*) = L_0(\tilde{\epsilon} + \epsilon' - \alpha^* - \epsilon^*) \quad (2.157)$$

其中

$$\epsilon' = S(\epsilon^* + \alpha^*) \quad (2.158)$$

式中 ϵ' 是单根纤维引起的扰动应变, ϵ^* 是纤维夹杂的等效本征应变, S 是纤维的 Eshelby 张量, α^* 是纤维与基体之间的热失配应变

$$\alpha^* = (\alpha^1 - \alpha^0)\Delta T \quad (2.159)$$

且 α^* 具有如下形式:

$$\alpha_{ij}^* = (\alpha_{11}^*, \alpha_{22}^*, \alpha_{33}^*, 0, 0, 0)^T \quad (2.160)$$

将式(2.158)代入式(2.157),得

$$\epsilon^* = - [\Delta L(S - I) + L_1]^{-1} [\Delta L \bar{\epsilon} + \Delta L(S - I)\alpha^*] \quad (2.161)$$

其中

$$\Delta L = L_1 - L_0$$

根据物体内部扰动应力自平衡条件,即

$$\frac{1}{V} \int_{V-V_1} \sigma^m dv + \frac{1}{V} \int_{V_1} \sigma^f dv = 0 \quad (2.162)$$

式中 V 为复合材料的总体积, V_1 是纤维的体积含量。将式(2.156), (2.157) 代入上式中,有

$$\bar{\epsilon} + C_1(\epsilon' - \epsilon^* - \alpha^*) = 0 \quad (2.163)$$

这里 $C_1 = V_1/V$ 是纤维的体积份数

$$\bar{\epsilon} = -C_1(S - I)(\epsilon^* + \alpha^*) \quad (2.164)$$

将式(2.161)代入式(2.164)中,得到

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} = \{I - C_1(S - I)[\Delta L(S - I) + L_1]^{-1}\Delta L\}^{-1}C_1(S - I) \\ \{[\Delta L(S - I) + L_1]^{-1}\Delta L(S - I) - I\}\alpha^* \end{aligned} \quad (2.165)$$

我们知道,在体积为 V 的复合材料中体平均应变场 $\bar{\epsilon}$ 为

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{V} \int_{V-V_1} \bar{\epsilon} dv + \frac{1}{V} \int_{V_1} (\bar{\epsilon} + \epsilon') dv = \bar{\epsilon} + C_1 S(\epsilon^* + \alpha^*) \quad (2.166)$$

利用式(2.164)和(2.161)的结果,整理得

$$\bar{\epsilon} = C_1 \alpha^* - C_1 [\Delta L(S - I) + L_1]^{-1} [\Delta L \bar{\epsilon} + \Delta L(S - I)\alpha^*] \quad (2.167)$$

利用得到的复合材料体平均应变场 $\bar{\epsilon}$ 与热失配应变 α^* , 平均扰动应变 $\bar{\epsilon}$ 之间的关系,结合式(2.165),最终可以解出单向纤维增强复合材料有效热膨胀系数为

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^0 + \bar{\epsilon}_{ij}/\Delta T \quad (2.168)$$

其中 $\alpha_{ij} = (\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 0, 0, 0)$, 如果是横观各向同性复合材料,则 $\alpha_{22} = \alpha_{33}$, 1 轴沿纤维方向。

作为算例,我们选用碳/环氧复合材料,其中基体为宏观各向

同性材料,而纤维组分是横观各向同性材料,它们的材料常数由表 2.1 给出。

表 2.1 碳/环氧复合材料的材料常数

力学性能			热膨胀系数	
基体	泊松比 0.38 杨氏模量 3.43GPa		α^0	$66.0 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
纤维	C_{11} (纤维方向)	234.79GPa	纵向 α_{11}	$-1.5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
	C_{33}	28.25GPa	横向 α_{22}	$27.0 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
	C_{44}	16.02GPa		
	C_{66}	10.00GPa		
	C_{12}	12.14GPa		

图 2.32 给出了短纤维增强复合材料的热膨胀系数随纤维含

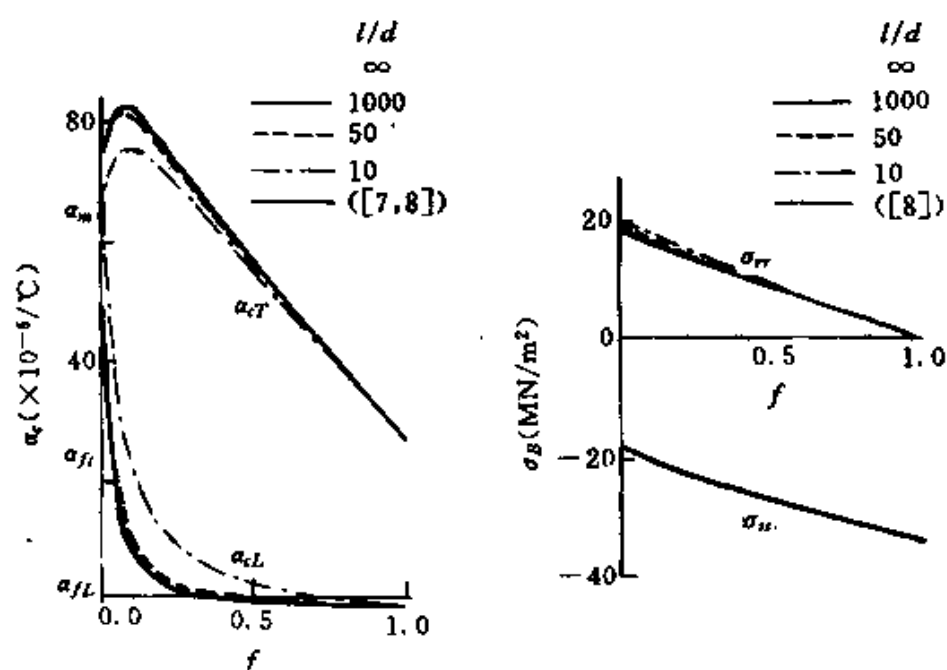


图 2.32 短纤维复合材料热膨胀系数随纤维体积含量变化曲线

量变化曲线。图中发现复合材料纵向热膨胀系数初始随纤维体积

含量的增加变化很快,这是因为复合材料热膨胀系数不仅取决于组分的热物理性能,还和刚度系数有密切关系。由于纤维的纵向刚

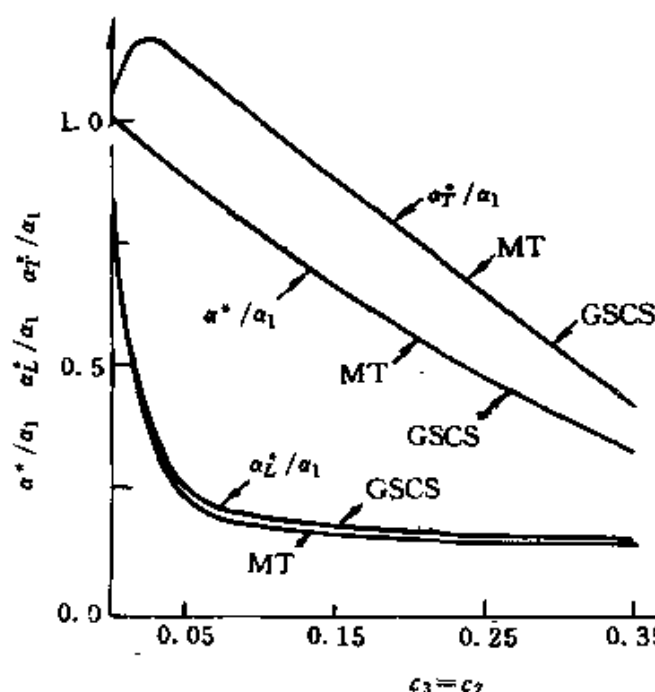


图 2.33 颗粒或纤维复合材料热膨胀系数与夹杂份数的关系^[58]

度远大于基体刚度,因此对纵向 α_{11} 的影响较大,另外纵向 α_{11} 在纤维含量 10% 内的突变,引起横向 α_{22} 的增加也是合理的,它要保证物体内部变形的协调性。当短纤维长径比 $l/d \rightarrow \infty$ 时,热膨胀系数的计算值与 Ishikawa^[56]和 Uemura^[57]的结果完全一致。

此外, Takao 和 Taya^[58]利用 Eshelby 等效夹杂法和 Mori-Tanaka 法研究了单向短纤维增强复合材料(carbon fiber/aluminum)的热膨胀系数及夹杂内部热应力场分布。Siboni 和 Benveniste^[59]则针对颗粒或纤维增强复合材料,给出了 MT 方法和 GSCS 方法计算多相复合材料热膨胀系数的结果,如图 2.33,这两种方法的差别不大。文献[53]则对各种上、下限理论预报复合材料的热膨胀系数给予比较,并与实验结果对照,如图 2.34。梁军、杜善义等^[60]还利用 Mori-Tanaka 法对含有随机分布微裂纹的纤维增强复合材料热膨胀系数进行了预报,并对微裂纹缺陷的存在对

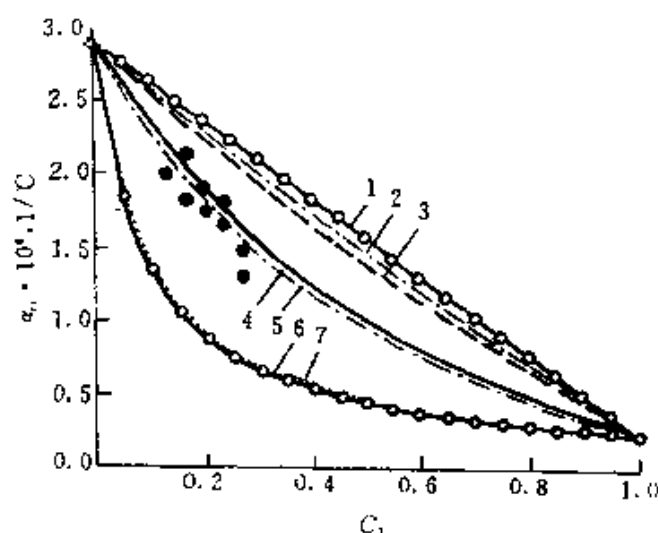


图 2.34 各种方法的热膨胀系数与纤维体积份数变化关系之比较^[53]

材料热力学性能的影响给予了深入分析。

参 考 文 献

- [1] 范赋群, 王震鸣, 嵇醒, 黄小清, 关于复合材料力学几个基本问题的研究, 力学与实践, 1995, 17: 4-7.
- [2] J. D. Eshelby, The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems, Proceedings of the Royal Society, London, Series A, 1957, 240: 367-396.
- [3] J. D. Eshelby, The Elastic Field Outside an Ellipsoidal Inclusion. *Proc. Roy. Soc.*, 1959, A252: 561-569.
- [4] R. Hill, A Self-consistent Mechanics of Composite Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, 13: 213-222.
- [5] B. Budiansky, On the Elastic Moduli of Some Heterogeneous Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, 13: 223-227.
- [6] T. Mori and K. Tanaka, Average Stress in Matrix and Average Energy of Materials with Misfitting Inclusions, *Act. Metall.*, 1973, 21: 571-574.
- [7] R. A. Roscoe, The Viscosity of Suspensions of Rigid Spheres, *Brit. J. Appl. Phys.*, 1952, 3: 267-269.
- [8] Z. Hashin and S. Shtrikman, A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, 11: 127-140.
- [9] Z. Hashin and S. Shtrikman, *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, 10: 335-342.

- [10] Z. Hashin, Analysis of Composite Materials—A Survey, *J. Appl. Mech.*, 1983, **50**: 481–505.
- [11] Z. Hashin, *J. Appl. Mech.*, 1962, **29**: 143–150.
- [12] K. J. Lee and R. A. Westmann, *J. Comp. Mater.*, 1970, **4**: 242–253.
- [13] T. Mura, *Micromechanics of defects in solids*, Martinus Nijhoff Publisher 1982.
- [14] A. V. Hershey, The Elasticity of an Isotropic Aggregate of Anisotropic Cubic Crystals, *J. Appl. Mech.*, 1954, **21**: 236–240.
- [15] E. Kroner, Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls, *Zeitschrift für Physik*, 1958, **151**: 504–518.
- [16] T. W. Chou, S. Nomura and M. Taya, *J. Comp. Mater.*, 1980, **14**: 178–188.
- [17] T. T. Wu, *Int. J. Solids Structures*, 1966, **2**: 1–8.
- [18] B. Budiansky and R. J. O'Connell, Elastic Moduli of a Cracked Solid, *Int. J. Solids Structures*, 1976, **12**: 81–97.
- [19] H. Horii and S. Nemat-Nasser, Overall Moduli of Solids with Microcracks; Load-Induced Anisotropy, *J. Mech. Phys. Solids*, 1983, **31**: 155–171.
- [20] N. Laws and J. R. Brockenbrough, The effect of micro-crack systems on the loss of stiffness of brittle solids, *Int. J. Solids Structures*, 1987, **23**: 1247–1268.
- [21] E. H. Kerner, *Proc. Phys. Soc.*, 1956, **B69**: 801–808.
- [22] R. M. Christensen and K. H. Lo, Solution for effective shear properties in a (three) phase sphere and cylinder models, *J. Mech. Phys. Solids*, 1979, **27**: 315–330.
- [23] H. A. Lo and G. J. Weng, On Eshelby's S-tensor in a three-phase cylindrically concentric solid, and the elastic moduli of fiber reinforced composites. *Mech. Materials*, 1989, **8**: 77–88.
- [24] S. S. Boucher, Modules effectifs de matériaux quasi homogènes et d'inclusions élastiques, I Cas des concentrations finies en inclusions, *Revue M* 1976, **22**: 1.
- [25] R. McLaughlin, A Study of the differential scheme for composite materials, *Int. J. Engng Sci.*, 1977, **15**: 237–244.
- [26] Z. Hashin The Differential Scheme and Its Application to Cracked Materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1988, **36**: 719–734.
- [27] C. M. Sayers and M. Kachanov, *Int. J. Solids Structures*, 1991, **27**: 671–680.
- [28] M. Kachanov, *J. Engng. Mech. Div. ASCE.*, 1980, **106**: 1039–1051.
- [29] M. Kachanov, ASME Winter Annual Meeting Boston, 1987: 99–105.
- [30] J. M. Duva and D. Storm, *ASME Trans. J. Engng. Mater. Tech.*, 1989, **111**: 368–371.
- [31] W. M. Bruner, *J. Geophys. Res.*, 1976, **81**: 2573–2576.
- [32] R. M. Christensen, A Critical Evaluation for a Class of Micromechanics Models, *J. Mech. Phys. Solids*, 1990, **38**: 379–404.

- [33] M. Taya and T. Mura, On Stiffness and Strength of an Aligned Short-Fiber Reinforced Composite Containing Fiber-End Cracks Under Uniaxial Applied Stress, *J. Appl. Mech.*, 1981, **48**: 361—367.
- [34] Y. Takao, T. W. Chou and M. Taya, Effective Longitudinal Young's Modulus of Misoriented Short Fiber Composites, *J. Appl. Mech.*, 1982, **49**: 536—539.
- [35] T. W. Chou and S. Nomura, Fiber Orientation Effects on the Thermoelastic Properties of Short-Fiber Composites, *Fiber Science and Technology*, 1980—1981, **14**: 279—291.
- [36] M. Taya, On Stiffness and Strength of an Aligned Short-Fiber Reinforced Composite Containing Penny-Shaped Cracks in the Matrix, *J. Comp. Mater.*, 1981, **15**: 198—210.
- [37] M. Taya and T. W. Chou, On Two Kinds of Ellipsoidal Inhomogeneities in an infinite Elastic Body and Application to a Hybrid Composite, *Int. J. Solids Structures*, 1981, **17**: 553—563.
- [38] 杜善义、李文芳, 含随机分布微裂纹的相变颗粒增韧陶瓷材料的强度和刚度预报。固体力学学报, 1994, **15**: 104—110.
- [39] 梁军、杜善义等, 一种含夹杂和微裂纹分布复合材料的弹性常数预报方法, 复合材料学报, 1997, **14**: 102—108.
- [40] Y. H. Zhao and G. J. Weng, Effective Elastic Moduli of Ribbon-Reinforced Composites, *J. Appl. Mech.*, 1990, **57**: 158—167.
- [41] R. Hill, Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strengthened Materials, 1 Elastic Behaviour, *J. Mechanics and Physics of Solids*, 1964, **12**: 199—212.
- [42] Z. Hashin, On Elastic Behavior of Fiber Reinforced Materials of Arbitrary Transverse Phase Geometry, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1965, **13**: 119—134.
- [43] W. Voigt, *Wied. Ann.*, 1889, **38**: 573—578.
- [44] A. Z. Rauss, *Angew. Math. Mach.*, 1929, **9**: 49—58.
- [45] R. Hill, *Proc. Phys. Soc.*, 1952, **A65**: 349—354.
- [46] B. Paul, *Trans. ASME*, 1960, **218**: 36—41.
- [47] L. J. Walpole, *J. Mech. Phys. Solids*, 1966, **14**: 151—162.
- [48] L. J. Walpole, *J. Mech. Phys. Solids*, 1966, **14**: 289—301.
- [49] J. R. Willis, *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, **26**: 185—202.
- [50] E. Kröner, Bounds for Effective Elastic Moduli of Disordered Materials, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1977, **25**: 137—155.
- [51] P. H. Dederichs and R. Zeller, Variational Treatment of the Elastic Constants of Disordered Materials, *Zeitschrift für Physik.*, 1973, **259**: 103—116.
- [52] S. Nomura and T. W. Chou, Bounds for Elastic Moduli of Multiphase Short-Fiber Composites. *J. Appl. Mech.*, 1984, **51**: 540—545.
- [53] H. Tolonen and S. G. Sjölind, Effect of Mineral Fibers on Properties of Compos-

- ite Matrix Materials, *Mechanics of Composite Materials*, 1995, **31**: 435—445.
- [54] S. Torquato, *Appl. Mech. Rev.*, 1991, **44**: 37—76.
- [55] 吴林志、杜善义、石志飞, 含夹杂复合材料宏观性能研究, *力学进展*, 1995, **25**: 410—423.
- [56] T. Ishikawa, K. Koyama and S. Kobayashi, Thermal Expansion Coefficients of Unidirectional Composites, *Journal of Composite Materials*, 1978, **12**: 153—168.
- [57] M. Uemura, H. Tyama and Y. Yamaguchi, Thermal Residual Stresses in Filament-Wound Carbon-Fiber Reinforced Composites, *Journal of Thermal Stresses*, 1979, **2**: 393—412.
- [58] Y. Takao and M. Taya, Thermal Expansion Coefficients and Thermal Stresses in an Aligned Short Fiber Composite With Application to a Short Carbon Fiber/Aluminum, *J. Appl. Mech.*, 1985, **52**: 806—810.
- [59] G. Siboni and Y. Benveniste, A Micromechanics model for the effective thermo-mechanical behaviour of multiphase composite media, *Mechanics of Materials*, 1991, **11**: 107—122.
- [60] 梁军、杜善义、许兴利, 含缺陷单向纤维增强复合材料的热膨胀系数预报, *哈工大学报*, 1997, **29**: 236—238.

第三章 连续纤维复合材料 细观强度理论

复合材料的破坏是一个很复杂的过程,它主要是细观损伤的积累过程。而且,复合材料的强度不仅取决于其组分如纤维、基体及界面的种类及性能,还取决于纤维的铺设方式、含量等细观结构性质。如何依据材料的微结构信息揭示复合材料的破坏规律,并进而预报复合材料的强度是自从人造复合材料运用于工程实际以来,人们一直追求的目标。因为,这不仅能够解释为什么复合材料具有如此优异的强度性能等科学问题,而且主要还能指导人们根据工程需要设计得到最优的复合材料。建立能预报复合材料的强度性能正确的模型必须考虑到如下两方面主要因素。一是复合材料组分材料性能的随机性,如纤维增强复合材料中的纤维的强度往往具有较大的分散性。在外载的作用下,较弱的纤维将首先发生破坏。材料性能的随机分布性质是复合材料损伤破坏过程异彩纷呈的主要原因。复合材料较弱的部分发生破坏后,复合材料内部应力场的分布情况将发生较大的变化。这一应力场的分布,又称为载荷传递特性,决定了复合材料的整个损伤破坏过程,是强度预报模型所必须考虑的第二方面主要因素。在 § 3.1,将以剪切滞后方法(the shear-lag analysis)为主线,系统阐述预报复合材料内部应力集中的模型及所得到的结果。§ 3.2 将介绍单根纤维拉伸强度分布。§ 3.3 将针对于纤维束,阐述预报其强度分布的细观力学模型。§ 3.4 将介绍预报单向纤维增强复合材料强度性能的模型及结果。

§ 3.1 复合材料中的应力集中

对于纤维增强复合材料来说,由于纤维的强度分散性较大,许多较弱的纤维在较低载荷,甚至在加工过程中就已经断裂。这样,由于应力集中的影响,断裂点周围的纤维将承担较大的载荷。如果能够正确地确定断裂点附近纤维所承受的载荷,就能正确地确定材料的损伤演化过程,并进而预报复合材料的强度。无疑这是一个十分复杂的力学问题。因为,即使对于含有缺陷的均匀各向同性介质其应力集中的计算也涉及到许多复杂的数学推导及数值求解过程。Hedgepeth(1961)^[1]最早引入了剪滞法(the shear-lag method)用于求解由于纤维的破坏而导致的应力集中问题,并取得了极大成功。这一方法的主要假设为:(1)纤维仅仅承担轴向载荷,(2)纤维之间的基体仅仅传递剪切载荷。在这之后,人们又进行了大量工作用于发展这一模型并求解多根纤维破坏、基体发生塑性屈服等许多复杂问题。例如:Fichter(1969, 1970)^[4,5]; Hedgepeth 和 Van Dyke(1967)^[2], Van Dyke 和 Hedgepeth(1969)^[3]; Zweben(1974)^[6]; Goree 和 Gross(1979)^[7]; Hikami 和 Chou(1984)^[8]; Fukuda 和 Kawata,(1976, 1980)^[10,11]; Chou(1992)^[9]; 范赋群和曾庆敦^[12]等。

§ 3.1.1 单根纤维破坏导致的应力集中

考虑复合材料中三根平行等距分布的纤维,其中中间的一根纤维已经断裂(图 3.1)。这一模型也可以表示中间层已经断裂了的复合材料层合板。

根据对称性,只需考虑三根纤维材料单元的一半,令二根纤维分别为 $n = 1, 2$, 纤维沿轴向 x 的平衡方程可以表示为(图 3.2)

$$\frac{1}{2} \frac{dp_1}{dx} + \tau = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{dp_2}{dx} - \tau = 0 \quad (3.2)$$

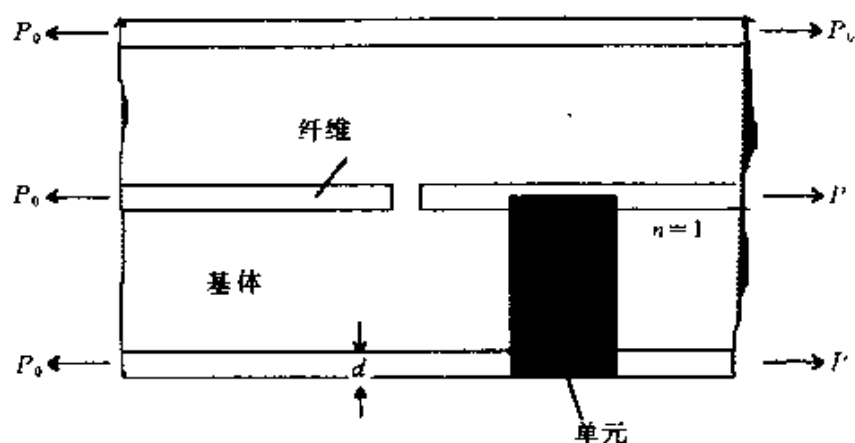


图 3.1 用于剪滞法分析的复合材料模型

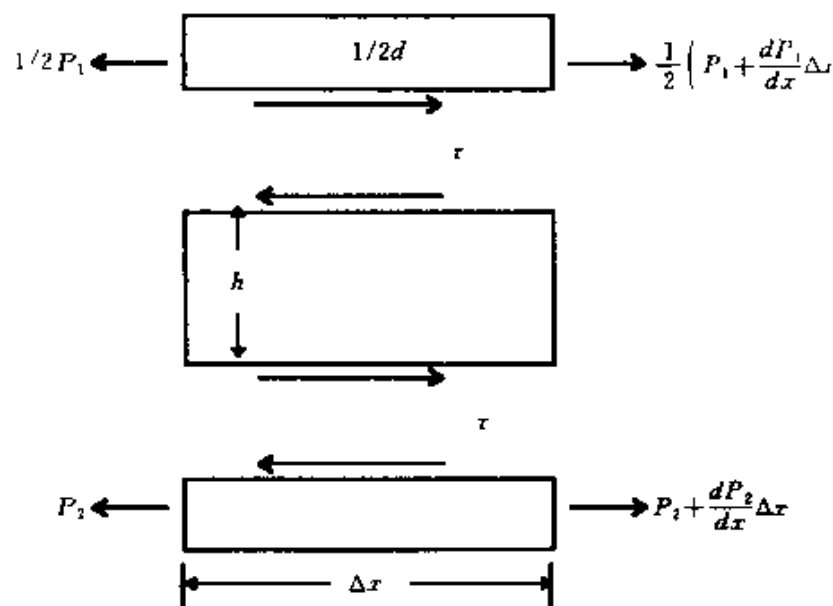


图 3.2 用于剪滞法分析的材料单元

式中, p_1, p_2 分别表示单位厚度纤维 1 及 2 中轴向拉伸载荷, τ 是作用于纤维表面的剪切应力。令第 n 根纤维内部的轴向位移为 u_n , 则依据虎克定律可以得到

$$P_n = Ed \frac{du_n(x)}{dx} \quad n = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$\tau = \frac{G}{h} [u_2(x) - u_1(x)] \quad (3.4)$$

式中, E 为纤维的杨氏模量, G 为基体的剪切模量, h 为纤维之间间距, d 为纤维直径。不失普遍性, 在导出(3.4)式时, 我们认为复合材料单元的层厚为 1。

为方便数学处理, 引入如下无量纲参数,

$$\xi = x/d, \quad \alpha = Eh/Gd \quad (3.5)$$

将(3.5)代入方程(3.3)及(3.4)式, 并一并代入(3.1)及(3.2)式中, 可以得到

$$\frac{1}{2}\alpha \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + u_2 - u_1 = 0 \quad (3.6)$$

$$\alpha \frac{d^2 u_2}{d\xi^2} + u_1 - u_2 = 0 \quad (3.7)$$

等式(3.6)可以写成

$$u_2 = u_1 - \frac{1}{2}\alpha \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} \quad (3.8)$$

将(3.8)式代入(3.7)式中, 可以得到

$$\frac{d^4 u_1}{d\xi^4} - \frac{3}{\alpha} \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} = 0 \quad (3.9)$$

线性常微分方程(3.9)式的一般解可以写成

$$u_1 = A + B\xi + Ce^{\lambda\xi} + De^{-\lambda\xi} \quad (3.10)$$

式中, $\lambda = \sqrt{\frac{3}{\alpha}}$, A, B, C, D 为积分常数。将(3.10)式代入(3.8)式中, 可以求得

$$u_2 = A + B\xi - \frac{1}{2}Ce^{\lambda\xi} - \frac{1}{2}De^{-\lambda\xi} \quad (3.11)$$

常数 A, B, C, D 可以由边界条件及方程(3.3)式求得

$$(u_2)_{\xi=0} = 0, (P_1)_{\xi=0} = 0, (P_1)_{\xi=\infty} = (P_2)_{\xi=\infty} = P_0 \quad (3.12)$$

因此, 可以得到纤维的轴向位移及载荷分别为

$$u_1 = \frac{P_0}{E} \left(\frac{1}{2\lambda} + \xi + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\xi} \right) \quad (3.13)$$

$$u_2 = \frac{P_0}{E} \left(\frac{1}{2\lambda} + \xi - \frac{1}{2\lambda} e^{-\lambda\xi} \right) \quad (3.14)$$

$$P_1 = P_0(1 - e^{-\lambda\xi}) \quad (3.15)$$

$$P_2 = P_0(1 + \frac{1}{2}e^{-\lambda\xi}) \quad (3.16)$$

P_1 及 P_2 沿纤维轴向分布如图 3.4。正如人们预料的一样,该模型的应力集中因子 $K = (P_2/P_0)_{\xi=0} = 1.5$ 。而且,应力沿纤维的轴向分布依赖于材料常数 λ_0 ,且最大剪应力也发生在 $\xi = 0$ 处,其值等

于 $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3G}{Ehd}} \cdot P_0$ 。由(3.15)式可以知道,断裂纤维中的轴向载荷由 0 逐渐恢复至外加载荷 P_0 ,在实际计算中,往往定义纤维的无效长度等于载荷恢复至 90% 外加载荷时所需的长度,即

$$\frac{P_1}{P_0} = 1 - e^{-\lambda\xi} = 0.9 \quad (3.17)$$

因此

$$\delta = -\frac{1}{\lambda} \ln 0.1 \approx 2.3 \sqrt{\frac{Eh}{3Gd}} \quad (3.18)$$

由于断裂纤维附近较大的剪应力集中,可以想象断口附近纤维与基体的界面可能会产生滑移,或者基体产生等效的塑性变形。伴随这种界面性质,尽管相对这种三根纤维的特殊模型最大的应力集中系数不会改变,但载荷分布形态却会产生较大的变化。考虑由同样三根纤维组成的材料模型,在断口附近的基体沿轴向有一长度为 $2a$ 的非线性变形区域(图 3.3),并假设非线性变形区中剪切应力等于常数,并可以表示成 $\eta\tau_m$,其中 τ_m 为纤维与基体界面破坏应力, η 为大于 0 及小于 1 的常数。当 $\eta = 0$ 时,表明基体与纤维界面完全脱开,不传递任意载荷。当 $\eta = 1$ 时,表明基体或界面为理想弹塑性材料。我们将利用剪滞法求解这一模型。

在弹性变形区 $\xi \geq \bar{a}$ 中的平衡方程同方程(3.6)及(3.7)一样,

$$\frac{1}{2} \alpha \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} + u_2 - u_1 = 0 \quad (3.19)$$

$$\alpha \frac{d^2 u_2}{d\xi^2} + u_1 - u_2 = 0 \quad (3.20)$$

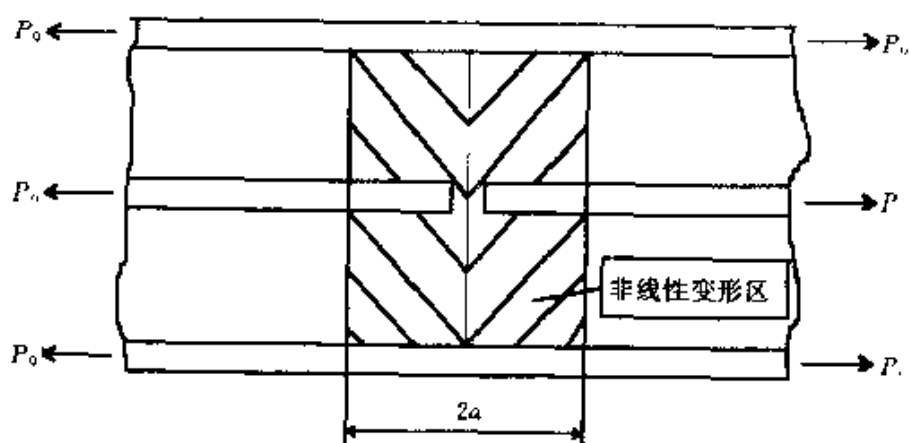


图 3.3 界面滑移的剪滞模型

式中, $\bar{a} = a/d$ 。

然而非线性变形区, $0 \leq \xi \leq \bar{a}$, 其平衡方程可以表示成

$$\frac{1}{2} \alpha \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - \eta \bar{\tau}_m = 0 \quad (3.21)$$

$$\alpha \frac{d^2 u_2}{d\xi^2} + \eta \bar{\tau}_m = 0 \quad (3.22)$$

式中, $\bar{\tau}_m = \tau_m h/G$ 。

其边界条件分别为

$$(u_2)_{\xi=0} = 0, (P_1)_{\xi=0} = 0, (P_1)_{\xi=\infty} = (P_2)_{\xi=\infty} = P_0 \quad (3.23)$$

而且, 其解必须满足如下连续性条件: 在 $\xi = \bar{a}$ 处, 其位移及轴向载荷均连续, 且

$$-\eta \bar{\tau}_m = u_2(\bar{a}) - u_1(\bar{a}) \quad (3.24)$$

方程(3.21)及(3.22)的解为

$$u_1 = A_1 + B_1 \xi + \frac{\eta \bar{\tau}_m}{\alpha} \xi^2 \quad (3.25)$$

$$u_2 = A_2 + B_2 \xi - \frac{\eta \bar{\tau}_m}{2\alpha} \xi^2 \quad (3.26)$$

根据边界条件(3.23) 第一、二式,

$$A_2 = 0, B_1 = 0 \quad (3.27)$$

弹性变形区域(3.19)及(3.20)式的解由(3.10)及(3.11)式决定,利用边界条件(3.23)式,可以表示成

$$u_1 = A + \frac{P_0}{E}\xi + De^{-\lambda\xi} \quad (3.28)$$

$$u_2 = A + \frac{P_0}{E}\xi - \frac{1}{2}De^{-\lambda\xi} \quad (3.29)$$

应用 $\xi = \bar{a}$ 处的连续性条件,可以得到

$$A_1 + \frac{\eta\bar{\tau}_m}{\alpha}\bar{a}^2 = A + \frac{P_0}{E}\bar{a} + De^{-\lambda\bar{a}} \quad (3.30)$$

$$B_2\bar{a} - \frac{\eta\bar{\tau}_m}{2\alpha}\bar{a}^2 = A + \frac{P_0}{E}\bar{a} - De^{-\lambda\bar{a}} \quad (3.31)$$

$$\frac{2\eta\bar{\tau}_m}{\alpha}\bar{a}^2 = \frac{P_0}{E} - D\lambda e^{-\lambda\bar{a}} \quad (3.32)$$

$$B_2 - \frac{\eta\bar{\tau}_m}{\alpha}\bar{a}^2 = \frac{P_0}{E} + \frac{1}{2}D\lambda e^{-\lambda\bar{a}} \quad (3.33)$$

将(3.28)式及(3.29)式代入(3.24)式中,得到

$$-\frac{3}{2}De^{-\lambda\bar{a}} = -\eta\bar{\tau}_m \quad (3.34)$$

将(3.34)式代入(3.32)式中,可以求得滑移长度 $\bar{a}$

$$\bar{a} = \frac{P_0\alpha}{2\eta\bar{\tau}_m E} - \frac{1}{3}\lambda\alpha \quad (3.35)$$

通过联立求解(3.30), (3.31), (3.32)及(3.33),可以确定常数 D, B_2, A, A_1 。从(3.35)式可以发现

$$a = 0, \text{ 当 } \frac{P_0}{\eta\bar{\tau}_m E} \leq \frac{1}{3}\lambda \quad (3.36)$$

$$D = \frac{2}{3}\eta\bar{\tau}_m e^{\lambda\bar{a}} \quad (3.37)$$

$$B_2 = \frac{3P_0}{2E} \quad (3.38)$$

$$A = \frac{P_0\bar{a}}{2E} + \frac{2}{3}\eta\bar{\tau}_m - \frac{\eta\bar{\tau}_m}{2\alpha}\bar{a}^2 \quad (3.39)$$

$$A_1 = \frac{3P_0\bar{a}}{2E} - \frac{3\eta\bar{\tau}_m}{2\alpha}\bar{a}^2 + \frac{4}{3}\eta\bar{\tau}_m \quad (3.40)$$

纤维中应力分布为

$$\begin{cases} P_1 = E \frac{du_1}{d\xi} = \frac{2\eta\bar{\tau}_m E}{\alpha} \xi \\ P_2 = E \frac{du_2}{d\xi} = EB_2 - \frac{\eta\bar{\tau}_m E}{\alpha} \xi = \frac{3}{2}P_0 - \frac{\eta\bar{\tau}_m E}{\alpha} \xi \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq a \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} P_1 = P_0 - ED\lambda e^{-\lambda\xi} = P_0 - \frac{2}{3}E\eta\bar{\tau}_m\lambda e^{-\lambda(\xi-a)} \\ P_2 = P_0 + \frac{1}{2}ED\lambda e^{-\lambda\xi} = P_0 + \frac{1}{3}E\eta\bar{\tau}_m\lambda e^{-\lambda(\xi-a)} \end{cases} \quad \xi \geq a \quad (3.42)$$

纤维与基体结合完好以及纤维表面发生滑移两种情况下,载荷沿纤维的分布情况如图 3.4 所示。可以发现,由于界面产生滑

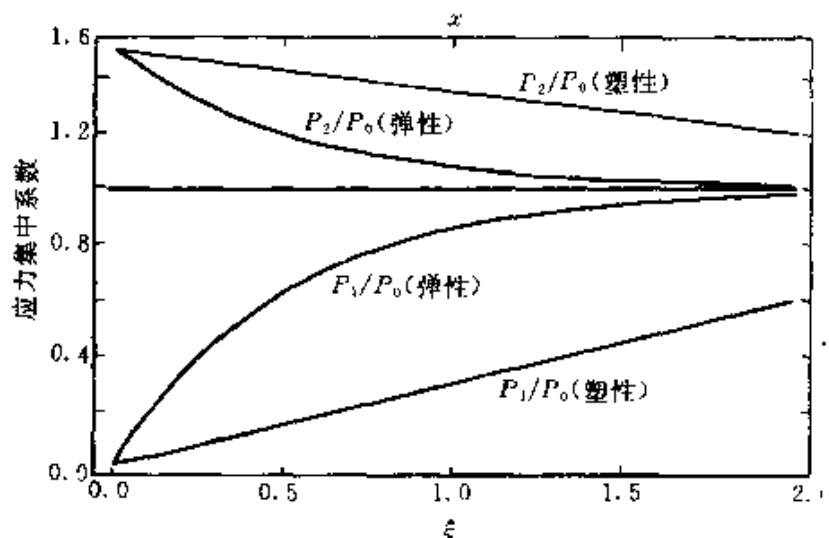


图 3.4 纤维轴向载荷分布

移,沿纤维方向应力集中变得更加均匀,对于这种由三根纤维组成的材料模型,由于最大应力集中系数相同,界面滑移的效果还不是很明显,对于多根纤维构成的复合材料模型,由于界面滑移,缺口的应力集中将较均匀地由其前缘纤维承担。由于纤维的强度是随

机分布,也即是说,不一定承载最大的纤维首先断裂,这样,界面滑移导致材料的破坏点较为分散,在一定条件下,可以避免材料发生突发性破坏,对材料的性能改进是有意义的。

§ 3.1.2 多根纤维破坏导致的应力集中

考虑一二维单向纤维增强复合材料(如图 3.5 所示)。其中有 b 根纤维已经断裂,断裂纤维由左至右的排序为 $n = 1, 2, \dots, b$ 。

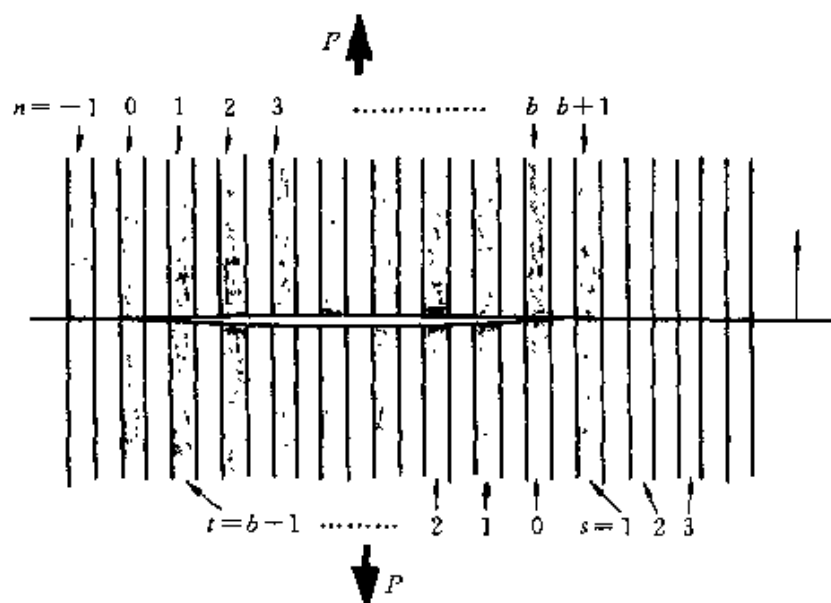


图 3.5 多根纤维断裂复合材料模型

试件在单向拉伸载荷 P_0 的作用下,求裂纹尖端未断裂的纤维承担的载荷。根据剪滞法假设,基体材料仅仅传递剪切载荷。设作用在单位长度纤维上的剪切载荷为 τ_n ,则

$$\tau_n(x) = \frac{Gh}{d} [u_{n+1}(x) - u_n(x)] \quad (3.43)$$

式中, G 为基体的有效剪切模量, h 为复合材料厚度, d 为纤维之间有效间距, $u_n(x)$ 和 $u_{n+1}(x)$ 分别为第 n 根及第 $n+1$ 根纤维的轴向位移。第 n 根纤维单位厚度所承受的轴向载荷为

$$P_n(x) = EA \frac{du_n(x)}{dx} \quad (3.44)$$

式中, A 为纤维的横截面积。

第 n 根纤维 x 方向平衡方程为

$$\frac{dp_n}{dx} + \tau_n - \tau_{n-1} = 0 \quad (3.45)$$

将(3.43)式及(3.44)式代入(3.45)式中,可以得到

$$EA \frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + \frac{Gh}{d} [u_{n+1}(x) + u_{n-1}(x) - 2u_n(x)] = 0 \quad (3.46)$$

边界条件为

$$P_n(0) = 0 \quad (1 \leq n \leq b) \quad (3.47a)$$

$$u_n(0) = 0 \quad (n \geq 0, n \geq b+1) \quad (3.47b)$$

$$P_n(\pm \infty) = P_0 \quad (\text{所有 } n) \quad (3.47c)$$

引入如下无量纲参量

$$F_n(\xi) = P_n(x)/P_0 \quad (3.48a)$$

$$U_n(\xi) = u_n(x)(EAGh/dp_0^2)^{1/2} \quad (3.48b)$$

$$\xi = (Gh/EAd)^{1/2}y \quad (3.48c)$$

这样,式(3.46)及(3.47)成为

$$\frac{d^2 V_n}{d\xi^2} = 2U_n(\xi) - U_{n+1}(\xi) - U_{n-1}(\xi) \quad (3.49)$$

以及

$$F_n(0) = 0 \quad 1 \leq n \leq b \quad (3.50a)$$

$$U_n(0) = 0 \quad n \leq 0, n \geq b+1 \quad (3.50b)$$

$$F_n(\pm \infty) = 1 \quad \text{所有 } n \quad (3.50c)$$

引入新的函数 $V(\theta, \xi)$ 可以将微分-差分方程(3.49)式简化成一常微分方程,其中

$$V(\theta, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [U_n(\xi) - \xi] e^{in\theta} \quad (3.51)$$

$$U_n(\xi) - \xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\theta, \xi) e^{-in\theta} d\theta \quad (3.52)$$

也即是说, $\{U_n(\xi) - \xi\}$ 是 $V(\theta, \xi)$ 的傅里叶展开级数的系数。将(3.52)式代入(3.49)式中,可以得到

$$\frac{\partial^2 V(\theta, \xi)}{\partial \xi^2} = \gamma^2 V(\theta, \xi) \quad (3.53)$$

式中

$$\gamma = 2|\sin(\theta/2)| \quad (3.54)$$

方程(3.53)式的通解为

$$V(\theta, \xi) = C_1(\theta)e^{\gamma\xi} + C_2(\theta)e^{-\gamma\xi} \quad (3.55)$$

利用边界条件(3.50b)及(3.52)式,可以导出

$$C_1 + C_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(0)e^{in\theta} = \sum_{n=1}^b U_n(0)e^{in\theta} \quad (3.56)$$

利用边界条件(3.50c),当 $\xi \geq 0$ 时,

$$C_1 = 0 \quad (3.57)$$

因此

$$V(\theta, \xi) = e^{-\gamma\xi} \sum_{n=1}^b U_n(0)e^{in\theta} \quad (3.58)$$

利用边界条件(3.50a),可以确定裂纹张开位移的一半 $U_n(0)$,也即

$$F_n(0) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma \sum_{m=1}^b U_m e^{i(m-n)\theta} d\theta = 0 \quad (3.59)$$

利用矩阵形式,可以将方程(3.59)式表示成

$$\begin{bmatrix} U_1(0) \\ U_2(0) \\ \vdots \\ U_b(0) \end{bmatrix} = [G_{nm}]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

式中, $[G]$ 矩阵的分量为

$$G_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma e^{i(m-n)\theta} d\theta = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{[1 - 4(m-n)^2]} \quad (3.61)$$

利用等式(3.52)及(3.58),可以将第 n 根纤维位移场表示成

$$U_n(\xi) = \xi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-in\theta - \gamma\xi} [e^{i\theta}, e^{2i\theta}, \dots, e^{bi\theta}] \cdot [G_{nm}]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

利用勒让德多项式,可以求得 $U_n(0)$ 为

$$U_n(0) = \frac{\pi \{2(b-n)+1\}! \{2n-1\}!}{2^{2b} \{(b-n)!(n-1)!\}^2} \quad (3.63)$$

裂纹尖端第 $(b+s)$ 根纤维应力集中因子为

$$\begin{aligned} K_b^s &= F_{b+s}(0) \\ &= (b+2s-1) \cdot \frac{2s(2s+2)(2s+4)\cdots(2s+2b-2)}{(2s-1)(2s+1)(2s+3)\cdots(2s+2b-3)(2s+2b-1)} \end{aligned} \quad (3.64)$$

作为特例,裂纹尖端处第 1 根纤维的应力集中因子为

$$K_b^1 = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (2b+2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2b+1)} \quad (3.65)$$

相应于不同的断裂纤维数目 b 及不同位置的纤维 S , K_b^s 的变化曲线如图 3.6 所示。比较 (3.64) 式及 (3.65) 式可以发现

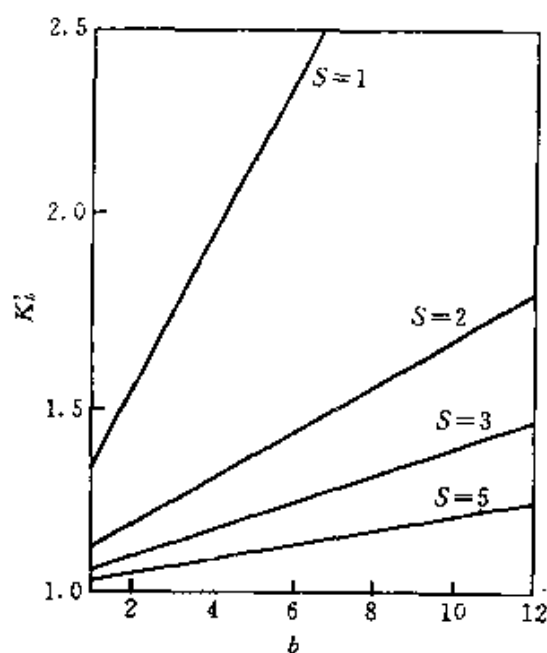


图 3.6 应力集中因子随纤维断裂数目及不同位置变化曲线^[9]

$$K_b^s = K_b^1 \cdot \frac{(2s-3)!!}{(2s-2)!!} \quad (s=1,2,3,\cdots) \quad (3.66)$$

同样,

$$U_n^{(a)} = U_1(0) \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} \quad (3.67)$$

当 $n \ll b$ 时,

$$U_1(0) = K_b^1 \quad (3.68)$$

等式(3.66), (3.67) 及(3.68) 表明, 裂纹尖端的应力及位移由单独一个参数 K_b^1 控制, 并且 s 与 b 相比较小时, K_b^1 与 $S^{-1/2}$ 成正比, 这与经典断裂力学理论揭示的裂纹尖端奇异场是一致的。而且, 最大剪切应力也发生在裂纹尖端, 其集中因子为

$$S_{\max} = \frac{\pi(2b-1)!}{2^{2b}[(b-1)!]^2} \quad (3.69)$$

下面考察一单位集中力作用于第 $b-a$ 根纤维上的边界条件下(图 3.7), 其应力场在复合材料内部分布情况。如果能够求得这一基本解后, 对于任何复杂应力边界问题, 均可以采用叠加法进行求解。利用无量纲量, 其边界条件可以表示成

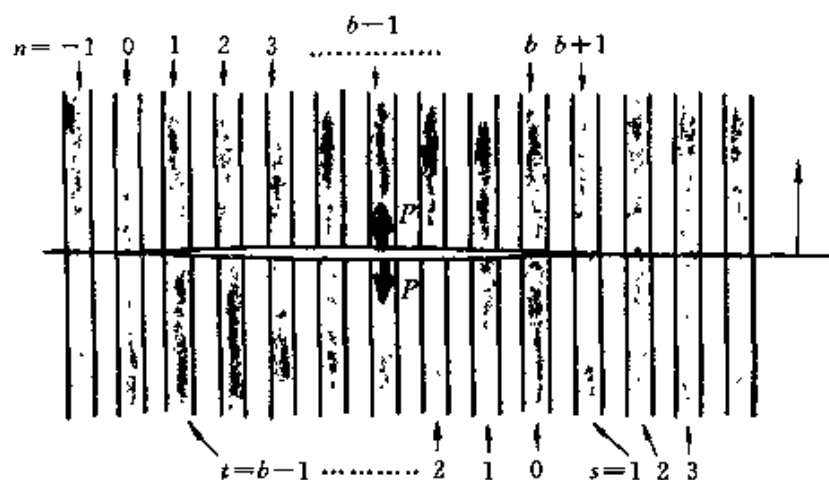


图 3.7 在集中力作用下复合材料模型

$$F_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, b-a-1, b-a+1, \dots, b) \quad (3.70a)$$

$$V_n(0) = 0, \quad n \leq 0, n \geq b+1 \quad (3.70b)$$

$$F_n(\pm \infty) = 0, \text{ 所有 } n \quad (3.70c)$$

$$F_{b-a}(0) = -1 \quad (3.70d)$$

裂纹尖端第 S 根纤维的应力集中系数为

$$K_b^s = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2a+1)!!(2b-2a-1)!!(2s-3)!!(2s+2b-2)!!}{(2a)!!(2b-2a-2)!!(2s-2)!!(2s+2b-1)!!} \cdot \frac{1}{s+a} \quad (3.71)$$

式中

$$n!! = (n!)! \quad (3.72)$$

裂纹尖端第一根纤维承受最大的载荷,其应力集中系数为

$$K_b^1 = \frac{(2a+1)!!(2b-2a-1)!!(2b)!!}{(2a+2)!!(2b-2a-2)!!(2b+1)!!} \quad (3.73)$$

K_b^1 的变化曲线如图 3.8 所示。

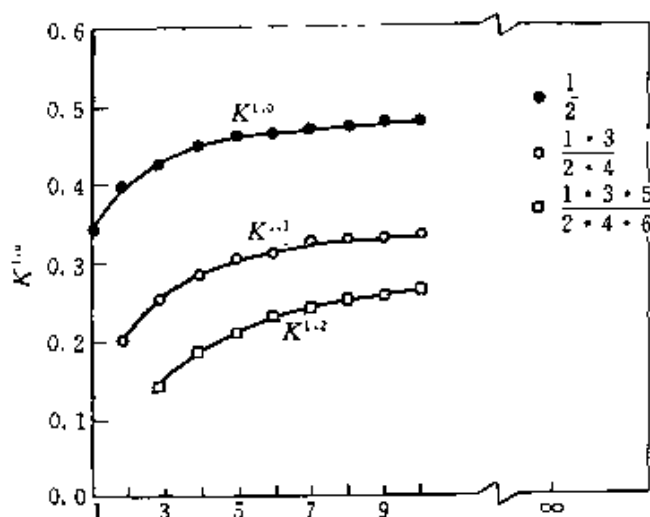


图 3.8 相应于不同断裂根数的裂纹尖端处应力集中因子^[9]

对于半无限长裂纹,在 a 根纤维上单位集中载荷的作用下,裂纹尖端第 S 根纤维应力集中因子为

$$\lim_{b \rightarrow 0} K_b^s = \frac{1}{2(s+a)} \cdot \frac{(2s+1)!!}{(2a)!!} \cdot \frac{(2s-3)!!}{(2s-2)!!} \quad (3.74)$$

如果基体产生塑性变形,或纤维与基体界面发生滑移,裂纹尖端载荷分布将更加均匀。对于无量纲塑性变形区尺寸 α 较小情况,裂纹尖端第 1 根纤维的应力集中因子近似为

$$\tilde{K}_b^1 \approx K_b^1 \left(1 - \frac{b}{2b+1} \cdot \frac{\alpha^2}{2} \right) \quad (3.75)$$

式中

$$\alpha \approx \frac{\pi b(b+1)}{2(K_b^1)^2(2b+1)} - \frac{1}{K_b^1} \left(\frac{T_0}{\sigma_\infty} \right) \quad (3.76)$$

式中, K_b^1 为弹性应力集中系数, σ_∞ 为外加拉伸载荷。

$$T_0 = \tau_y \left(\frac{dEh}{GA} \right)^{1/2} \quad (3.77)$$

式中, τ_y, G, E 分别为基体剪切强度, 基体剪切模量, 纤维拉伸模量, d, A, b 分别表示纤维之间距离, 纤维横截面积及每根纤维所占厚度。

对塑性变形区较大的情况, 应力集中因子可近似表示成

$$\tilde{K}_b^1 \approx 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{T_0}{\sigma_\infty} \right) [\ln(b\sigma_\infty/T_0) + \gamma] \quad (3.78)$$

式中, γ 是欧拉常数 (≈ 0.577)。

考察如图 3.9 所示的断裂及未断裂纤维的构形。初始裂纹由 b 根断裂纤维组成。裂纹右尖端未断裂的纤维开始至右端第二个裂纹右尖端排序为 $i_1, i_2, i_3, \dots, i_t$ ($b < i_1 < i_2 < \dots < i_t < b'$)。 b' 为最右端断裂纤维的编号。在上述纤维中的应力集中系数为 C_{i_α} ($\alpha = 1, 2, \dots, t$)。设 L_m^* 表示当单位集中载荷作用于裂纹面第 m 根纤维的

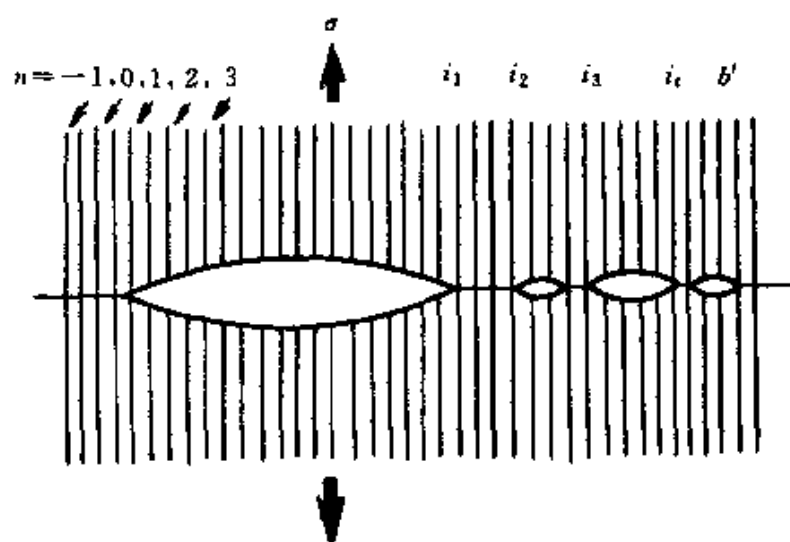


图 3.9 多根纤维断裂复合材料模型

条件下,第 n 根纤维在 $\xi = +0$ 的位移。则

$$[L_{nm}] \cdot [L_{nm}^*] = [E] \quad (3.79)$$

式中, $[E]$ 为 $(b' \times b')$ 单位矩阵, L_{nm} 由下式决定,

$$L_{nm} = \frac{4}{\pi} \{4(n-m)^2 - 1\}^{-1} \quad (3.80)$$

因此,应力集中因子可以求得为

$$\begin{bmatrix} C_{i_1} \\ C_{i_2} \\ \vdots \\ C_{i_t} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{i_1 i_1}^* & L_{i_1 i_2}^* & \cdots & L_{i_1 i_t}^* \\ L_{i_2 i_1}^* & L_{i_2 i_2}^* & \cdots & L_{i_2 i_t}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{i_t i_1}^* & L_{i_t i_2}^* & \cdots & L_{i_t i_t}^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_{i_1}^y \\ U_{i_2}^y \\ \vdots \\ U_{i_t}^y \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

式中, $U_{i_t}^y$ 是裂纹张开位移的一半,由(3.67)式决定。 L_{nm}^* 也可以由如下公式计算,

$$L_{nm}^* = -\frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{k=n+l-m}^{b+l-m} \frac{1}{2k-1} + \sum_{s=1}^{\infty} [K_{m,b}^{b+s} \cdot \left(\sum_{k=s}^{s+b-n} \frac{1}{2k-1} \right) - K_{b+l-m,b}^{b+s} \cdot \left(\sum_{k=s+n}^{s+b} \frac{1}{2k-1} \right)] \right\} \quad (n \geq m) \quad (3.82)$$

式中

$$K_{a,b}^c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\{2(b-a)+1\}!! \{2a-1\}!! \cdot \{2(c-b)-3\}!! \cdot \{2(c-1)\}!!}{\{2(b-a)\}!! \cdot \{2(a-1)\}!! \cdot \{2(c-b-1)\}!! \cdot \{2c-1\}!! \cdot (c-a)} \quad (3.83)$$

图 3.10 画出了 L_{nm}^* 随 b' 的变化曲线。当裂纹尺寸增加时, $(-L_{nm}^*)$ 趋于一极值,作为一特例,可以得到

$$L_{11}^* = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2b'-1)!!}{(2b'-2)!!} \cdot \frac{(2b'-1)!!}{(2b')!!} \quad (3.84)$$

借助于斯特灵公式,可以得到

$$\lim_{b' \rightarrow \infty} (-L_{11}^*) = \lim_{b' \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2b'-1)!!}{(2b'-2)!!} \cdot \frac{(2b'-1)!!}{(2b')!!} = 1 \quad (3.85)$$

§ 3.1.3 应力集中的近似计算方法

当复合材料中有一宏观缺口或者缺陷时,可以采用一些近似

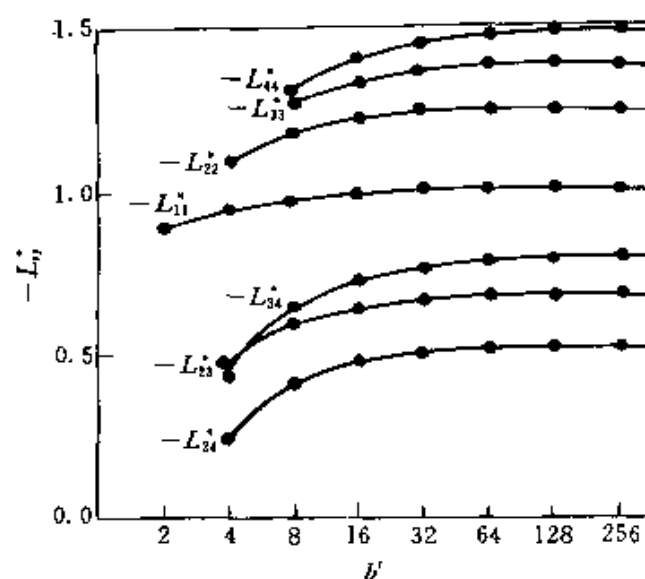


图 3.10 L_{ij}^* 随裂纹尺寸变化曲线^[9]

方法求得缺口尖端处纤维所承受的载荷。王彪^[13]等在 Carl Zweben (1974)^[6]工作的基础上,对这一问题进行了较为详尽的研究。一些前苏联学者,如切列帕诺夫^[14]采用断裂力学的方法得到了一些可以广泛应用于工程实际的简单计算公式。为了正确地预报含缺口复合材料的强度及确定材料的损伤容限,缺口尖端纤维承受的载荷是最重要的参数。

材料模型如图 3.11 所示。材料中心存在一个由 n 根断裂纤维组成的缺口。缺口尖端存在一完好的纤维,缺口外侧由具有复合材料性能参数的等效均匀材料组成。纤维与缺口及等效材料之间各由一层基体材料构成。我们仍然假设缺口所处的中心部分剪应力可以忽略,基体承受的拉伸应力也可以忽略。那么,关于材料中心部分及纤维的平衡方程可以表示为

$$\frac{1}{2} \frac{dP_1}{dx} - \tau_1 h = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{dP_2}{dx} + (\tau_1 + \tau_2)h = 0 \quad (3.87)$$

式中, h 为材料厚度。

设中心部分位移为 U_0 , 纤维位移为 U_1 , 复合材料的宏观位移

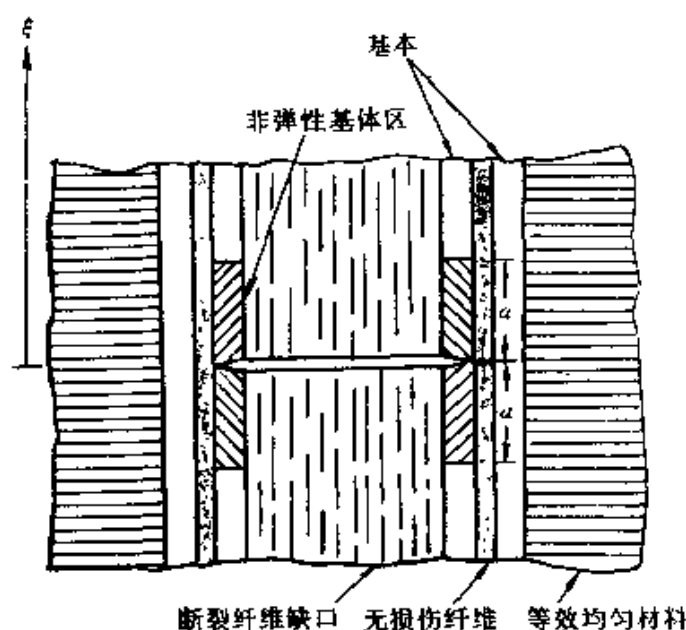


图 3.11 考虑基体产生非线性变形的材料模型

为 U , 则

$$\tau_1 = G_m(U_1 - U_0)/d \quad (3.88)$$

$$\tau_2 = G_m(U_1 - U)/d \quad (3.89)$$

$$P_1 = E_c L h \frac{dU_0}{dx} \quad (3.90)$$

$$P_2 = E_f A_f \frac{dU_1}{dx} \quad (3.91)$$

式中, G_m, E_c, E_f 分别为基体剪切模量、复合材料拉伸模量及纤维拉伸模量, d, L, A_f 分别为纤维之间间距, 缺口的总长度及纤维横截面积。将(3.88) ~ (3.91) 式代入(3.86) 及(3.87) 式中, 可以得到基体与纤维界面无滑移, 或者基体未发生塑性变形条件下的方程

$$E_c L h \frac{d^2 U_0}{dx^2} - 2G_m(U_1 - U_0)h/d = 0 \quad (3.92)$$

$$E_f A_f \frac{d^2 U_1}{dx^2} + \frac{G_m h}{d}(2U_1 - U_0 - \frac{\sigma}{E_c}x) = 0 \quad (3.93)$$

在导出(3.93) 时, 我们将关系式

$$U = \frac{\sigma}{E_c}x \quad (3.94)$$

代入,式中, σ 为外加拉伸载荷。

如果在区域 $0 \leq x \leq a$ 中,基体产生塑性变形,或者纤维与基体界面产生滑移,则在该区域内,方程(3.92)及(3.93)成为

$$E_c L h \frac{d^2 U_0}{dx^2} - 2h\tau_m = 0 \quad (3.95)$$

$$E_f A_f \frac{d^2 U_1}{dx^2} - h\tau_m - \frac{G_m h}{d}(U_1 - U) = 0 \quad (3.96)$$

式中, τ_m 为基体剪切屈服应力,或界面滑移阻力。

引入如下无量纲量,

$$u_i = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{A_f d}{E_f G_m h} \right]^{-1/2} U_i \quad (3.97a)$$

$$\xi = \left[\frac{E_f A_f d}{G_m h} \right]^{-1/2} x \quad (3.97b)$$

$$\alpha = \left[\frac{E_f A_f d}{G_m h} \right]^{-1/2} a \quad (3.97c)$$

$$\bar{\tau}_m = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{G_m A_f}{E_f d h} \right]^{-1/2} \tau_m \quad (3.97d)$$

可以将方程(3.92)~(3.96)化简成

$$\begin{cases} n \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} - 2\bar{\tau}_m = 0 \\ \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - u_1 + \frac{E_f \xi}{E_c} - \bar{\tau}_m = 0 \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (3.98)$$

$$\begin{cases} n \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} + 2(u_1 - u_0) = 0 \\ \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - 2u_1 + u_0 + \frac{E_f \xi}{E_c} = 0 \end{cases} \quad \xi \geq \alpha \quad (3.99)$$

式中, n 为缺口所包含的断裂纤维的数目。其边界条件为

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\xi}(0) &= 0, u_1(0) = 0 \\ \frac{du_0}{d\xi} &= \frac{du_1}{d\xi} = 1 \quad \xi \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.100)$$

在 $\xi = \alpha$ 处,要求位移及应力连续,且

$$u_1(\alpha) - u_0(\alpha) = -\bar{\tau}_m \quad (3.101)$$

求解方程(3.98), 并利用边界条件(3.100)可以得到

$$u_0 = \frac{\bar{\tau}_m}{n} \xi^2 + C_1 \quad (3.102a)$$

$$u_1 = \frac{E_f}{E_c} \xi - \bar{\tau}_m + C_2 e^{\xi} + (\tau_m - C_2) e^{-\xi} \quad 0 \leq \xi \leq a \quad (3.102b)$$

求解方程(3.99), 并利用边界条件, 可以得到

$$\begin{cases} u_0 = \frac{E_f}{E_c} \xi + B_1 e^{-K_1^2 \xi} + B_3 e^{-K_2^2 \xi} \\ u_1 = \frac{E_f}{E_c} \xi + B_1 (1 - \frac{n}{2} K_1^2) e^{-K_1^2 \xi} + B_3 (1 - \frac{n}{2} K_2^2) e^{-K_2^2 \xi} \end{cases} \quad \xi \geq a \quad (3.103)$$

式中

$$\begin{aligned} K_1 &= [1 + \frac{1}{n} - \frac{(1+n^2)^{1/2}}{n}]^{1/2} \\ K_2 &= [1 + \frac{1}{n} + \frac{(1+n^2)^{1/2}}{n}]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.104)$$

利用 $\xi = a$ 处位移及应力连续条件及式(3.101), 并令 $B_1 = x_1, B_3 = x_2, C_1 = x_3, C_2 = x_4, \bar{\tau}_m = x_5$, 可以建立如下线性方程组:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{15}x_5 = A_1 \quad (3.105)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{11} &= e^{-K_1^2 a} \\ a_{12} &= e^{-K_2^2 a} \\ a_{13} &= -1 \\ a_{15} &= -\frac{a^2}{n} \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -E_f/E_c a \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 &= A_2 \end{aligned} \quad (3.107)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{21} &= (1 - \frac{n}{2} K_1^2) e^{-K_1^2 a} \\ a_{22} &= (1 - \frac{n}{2} K_2^2) e^{-K_2^2 a} \end{aligned}$$

$$a_{24} = (e^{-\alpha} - e^{\alpha}) \quad (3.108)$$

$$a_{25} = 1 - e^{-\alpha}$$

$$A_2 = 0$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{35}x_5 = A_3 \quad (3.109)$$

式中

$$a_{31} = K_1 e^{-K_1 \alpha}$$

$$a_{32} = K_2 e^{-K_2 \alpha}$$

$$a_{35} = \frac{2\alpha}{n} \quad (3.110)$$

$$A_3 = \frac{E_f}{E_c}$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = A_4 \quad (3.111)$$

式中

$$a_{41} = K_1 \left(1 - \frac{n}{2} K_1^2\right) e^{-K_1 \alpha}$$

$$a_{42} = K_2 \left(1 - \frac{n}{2} K_2^2\right) e^{-K_2 \alpha} \quad (3.112)$$

$$a_{44} = e^{\alpha} + e^{-\alpha}$$

$$a_{45} = -e^{-\alpha}$$

$$A_4 = 0$$

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{55}x_5 = 0 \quad (3.113)$$

式中

$$a_{51} = \frac{n}{2} K_1^2 e^{-K_1 \alpha}$$

$$a_{52} = \frac{n}{2} K_2^2 e^{-K_2 \alpha} \quad (3.114)$$

$$a_{55} = 1$$

联立求解(3.105), (3.107), (3.109), (3.111), (3.113)式, 可以计算得到常数值, 并进而求得应力集中系数

$$K_n(\xi) = \left. \frac{du_1(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \quad (3.115)$$

图 3.12 画出了 $K_n(\xi)$ 随 n 及 α_m 的变化曲线。

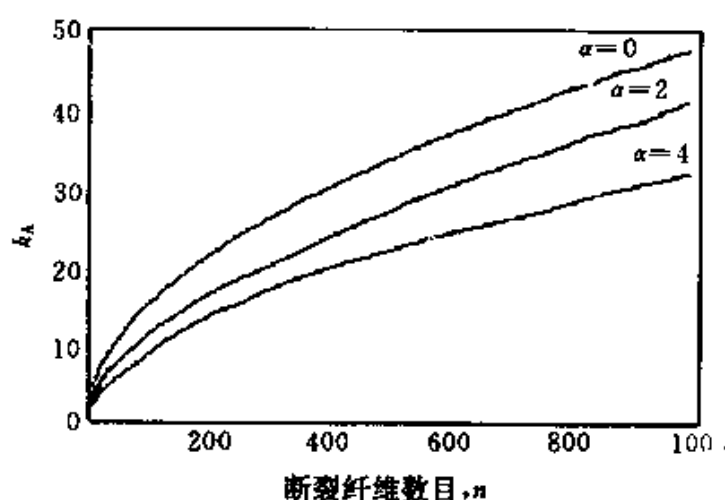


图 3.12 应力集中系数随缺口长度变化曲线

另外一种计算裂纹尖端纤维承受载荷的方法是借助经典断裂力学的手段。假定在一二维复合材料内有一条垂直于纤维的裂纹,其长度为 $2l_0$,为了求出裂纹尖端纤维所承受的载荷,首先设想用一块具有等效弹性反应的均匀正交各向异性板(板厚为 h_0 ,其弹性对称轴分别平行和垂直于纤维)来代替复合材料。在这样一块板内,在横向穿透裂纹的延线上的应力为 $K_I \sqrt{2\pi x}$,其中 K_I 是将板作为整体解出的应力强度因子, x 是沿裂纹延线上距裂纹尖端的距离, z 是纤维的方向。再回到纤维问题,假定全部载荷均由纤维承担,根据平衡条件

$$\sigma_z \pi r_0^2 = h_0 \int_{kd}^{(k+1)d} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} dx \quad (3.116)$$

可以求得裂纹尖端附近未断裂纤维内的应力为

$$\sigma_z = \frac{K_I h_0 \sqrt{2d}}{\pi \sqrt{\pi} r_0^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.117)$$

式中, $k \cdot d$ 为裂纹尖端到所讨论纤维中心的距离, r_0 为纤维半径, d 为纤维间距。

在应力最大的最近纤维内($k = 1$),可以得到

$$\sigma_2 = \frac{K_I h_0 \sqrt{2d}}{\pi \sqrt{\pi r_0^2}} \quad (3.118)$$

式中, K_I 可以依据不同的加载情况确定。

从上面的讨论可以发现,剪滞法最关键的假设是基体不承担拉伸载荷,只起到传递剪切载荷的作用。为了改进这一假设,范赋群及曾庆敦等做了许多有意义的工作^[12],并得到了一些很好的结果。本节中所讨论的内容将用于下文的复合材料的损伤及强度性能的预报中。

§ 3.1.4 动态应力集中因子

当复合材料中的某根纤维在外载作用下忽然断裂时,相当于施加了一脉冲载荷,这样,其周围的纤维承受的载荷将比依据准静态计算传递过来的载荷大许多。为了考虑动态条件下,断裂纤维周围纤维承担的载荷,我们如下仍然采用图 3.5 所示的二维已经有多根纤维断裂的材料模型。利用剪滞法来计算动态应力集中因子。

纤维均匀分布于基体中,其数目为 $n = -\infty$ 到 $n = \infty$ 。沿纤维方向坐标轴为 x 轴。第 n 根纤维 x 处时间为 t 时位移设为 $u_n(x, t)$ 。类似可写出第 n 根纤维单位厚度的载荷为 $P_n(x, t)$, 因此

$$P_n = Ed \frac{\partial u_n}{\partial x} \quad (3.119)$$

式中, E, d 分别为纤维的拉伸模量及宽度。其动态平衡方程为

$$Ed \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{G}{h} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = m \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \quad (3.120)$$

式中, G, h 分别为基体剪切模量及宽度, m 为第 n 根纤维单位面积的质量。

令 $1 \leq n \leq b$ 为断裂的纤维,边界条件为

$$P_n(0, t) = 0 (1 \leq n \leq b)$$

$$u_n(0, t) = 0 (n \leq 0 \text{ 或 } n \geq b + 1) \quad (3.121)$$

$$P_n(\pm \infty, t) = P_0 \quad (3.122)$$

式中, P_0 为外加拉伸载荷。初始条件为

$$P_*(x, 0) = P_0, \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (3.123)$$

(3.123) 表示当 $t = 0$ 时, 无任意断裂纤维存在。

对上述方程进行拉普拉斯变换, 可以得到同静态情况类似的方程。对于 1 根, 2 根及 3 根纤维断裂情况, 其应力集中因子 K_1^1 随无量纲时间参数 $\bar{t} = (t / \sqrt{md/G})$ 的变化曲线如图 3.13 所示。可以发现, 随时间增加, 应力集中因子趋于一稳态值。

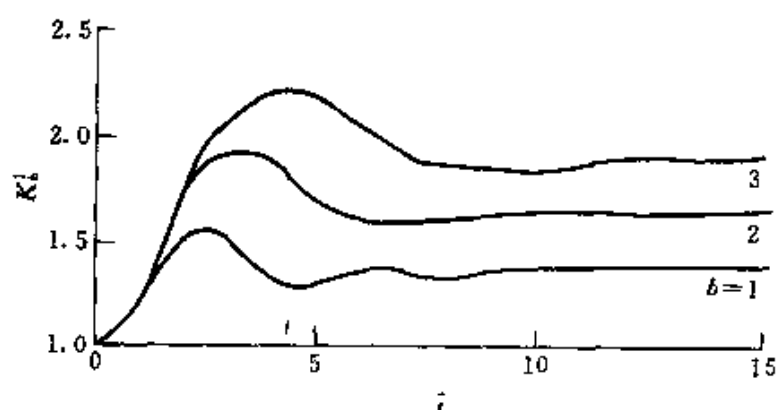


图 3.13 相应于不同数目断裂纤维的动态应力集中因子随时间变化曲线^[9]

通过计算可以发现, 相应于 1 根纤维断裂, 2 根纤维断裂及 3 根纤维断裂情况, 最大的动态应力同静态应力之比分别等于 1.15, 1.19 及 1.20。当断裂纤维数目趋于无穷大时, 该比值趋于 1.27。

考察只有 1 根断裂纤维时, 相邻纤维内部应力随无量纲时间及长度 $\xi = x / \sqrt{\frac{Ed}{G}}$ 分布, 其结果如图 3.14 所示。通过分析, 可以发现如下结论:

(1) 在断裂面 $\xi = 0$ 处, 纤维内部载荷总是拉伸的, 当 $\xi \neq 0$ 时, 开始时断裂纤维引起的是压应力, 并随 ξ 的增加而增加。

(2) 动态应力集中因子随 ξ 增加而降低。

(3) 当 $0 \leq \xi \leq 1$ 时, 动态应力集中因子影响较大 ($K_1^1 > 1.1$)。只有当 $\bar{t} > 10$ 时, 才趋近于静态应力集中因子。当 $\xi \geq 2$ 时, 静态应

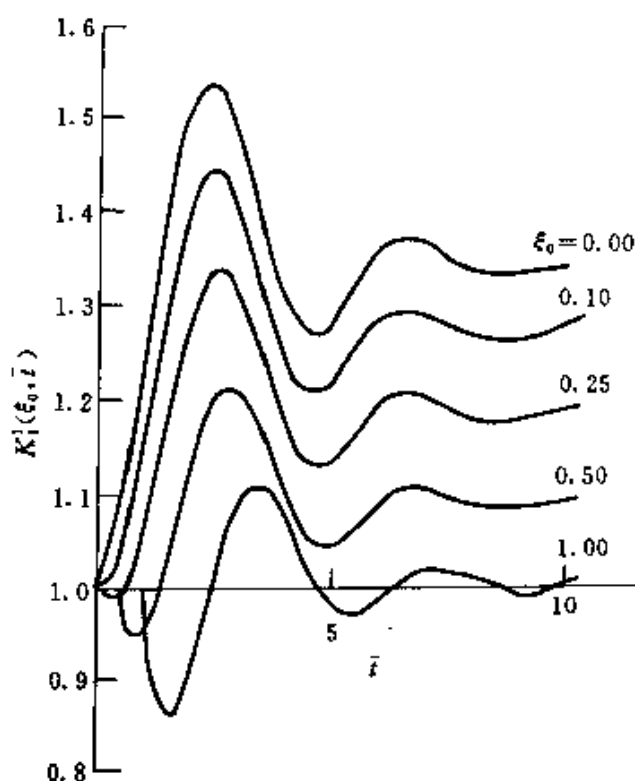


图 3.14 沿纤维不同位置动态应力集中因子随时间变化曲线^[9]

力集中因子几乎趋近于 1, 然而, 在时间很短时, 动态应力集中仍然是存在的。

在建立复合材料统计学模型时, 应该考虑到动态应力集中效果。

§ 3.2 单根纤维强度分布

得到广泛应用的复合材料一般由纤维及基体组成。而做为最重要组成相的纤维, 其强度往往具有较大的分散性。为了正确预报纤维增强复合材料的强度性能, 必须首先确定单根纤维的强度分布。Coleman(1958)^[15]证实了单根纤维的强度应服从 Weibull 分布, 这一结论已经得到了实验证实, 目前已经在工程实际中得到了广泛的应用。我们将基于如下认识导出同一类应变率无关纤维的

强度分布。

- (1) 单根纤维破坏总是由最弱的断面产生；
- (2) 不论纤维的长度如何，其强度总是正值；
- (3) 纤维的破坏概率 $P(\sigma_f)$ 是外载的单调增函数。

这样，可以认为任一纤维由 L 个单位长度的环组成。而任一环均具有相同的强度分布函数 $P(\sigma_f)$ 。某一环具有强度大于 σ_f 的概率为 $1 - P(\sigma_f)$ ，所有 L 个环均不破坏的概率为 $[1 - P(\sigma_f)]^L$ ，因此，在 σ_f 作用下，至少有一个环破坏的概率为

$$F(\sigma_f) = 1 - [1 - P(\sigma_f)]^L \quad (3.124)$$

实际上， $F(\sigma_f)$ 即为纤维的强度分布函数。

很显然，当纤维长度 L 较大时，如果 $P(\sigma_f)$ 比较大，那么 $[1 - P(\sigma_f)]^L$ 将趋于零，因此，较长纤维的强度分布主要由较小的 $P(\sigma_f)$ 部分决定，而较小的 $P(\sigma_f)$ 形态取决于较小的外加载荷 σ_f 。

在没有任何其它信息的条件下，当 σ_f 趋于 0 时，作为 σ_f 连续光滑函数的 $P(\sigma_f)$ 可以表示成

$$\lim_{\sigma_f \rightarrow 0} P(\sigma_f) = C\sigma_f^\beta + O(\sigma_f^\beta) \quad (3.125)$$

式中， C, β 为正的常数。

用如下关系定义一名义载荷 t_L ，

$$P(t_L) = \frac{1}{L} \quad (3.126)$$

并且定义一新随机变量 Z_L 如下

$$Z_L = t_L \min(x_1, x_2, \dots, x_L) \quad (3.127)$$

式中， $\min(x_1, x_2, \dots, x_L)$ 表示 L 个单位环强度的最小值。显然 $L \rightarrow \infty$ 时， $t_L \rightarrow 0$ ， Z_L 大于某一值 X 的概率可以表示成

$$P_r(Z_L > X) = [1 - P(t_L X)]^L \quad (3.128)$$

利用(3.125)式，可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} P_r(Z_L > x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} [1 - P(t_L X)^\beta]^L \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} [1 - \frac{1}{L} X^\beta]^\beta \\ &= \exp\{-X^\beta\} \end{aligned} \quad (3.129)$$

令 $\sigma_f = t_L^{-1}X$, 可以得到

$$P_r(Z_L > X) = P_r\{\min(x_1, \dots, x_L) > \sigma_f\} = 1 - F(\sigma_f) \quad (3.130)$$

因此, 我们可以得到纤维的强度分布为

$$F(\sigma_f) = 1 - \exp\{- (\sigma_f/t_L)^\beta\} \quad (3.131)$$

利用(3.125)式, 可以得到 $t_L = (CL)^{-1/\beta}$, 代入(3.131)得到

$$F(\sigma_f) = 1 - \exp\{-LC\sigma_f^\beta\} = 1 - \exp\{-L(\frac{\sigma_f}{\sigma_0})^\beta\} \quad (3.132)$$

(3.132)式为二参数的 Weibull 分布。它的 m 阶矩为

$$E[\sigma_f^m] = \int_0^\infty \sigma_f^m \frac{dF}{d\sigma_f} d\sigma_f = t_L^m \Gamma(1 + m/\beta) \quad (3.133)$$

其均值和均方差分别为

$$E(\sigma_f) = C^\beta L^{-1/\beta} \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}) \quad (3.134)$$

$$S = C^\beta L^{-1/\beta} [\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})]^{1/2} \quad (3.135)$$

其中, Γ 为 Gamma 函数。

显然, 纤维的平均强度依赖于纤维长度, 而变差系数定义为

$$\alpha = \frac{S}{E(\sigma_f)} = \left[\frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\beta})}{\Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})} - 1 \right]^{1/2} \quad (3.136)$$

则它仅依赖于分布参数 β 。 β 愈小, 材料性能分散性愈大, β 愈大, 分散性愈小, 对于脆性纤维, β 取值在 $2 \sim 4$ 之间, 对于韧性金属材料 β 取值在 20 左右。例如, 石墨纤维 β 值为 4, 硼纤维的 β 值在 $2.7 \sim 5.8$ 之间, 玻璃纤维的 β 值为 11。三种长度的碳纤维强度值的测试结果在 Weibull 概率纸上如图 3.15 所示。

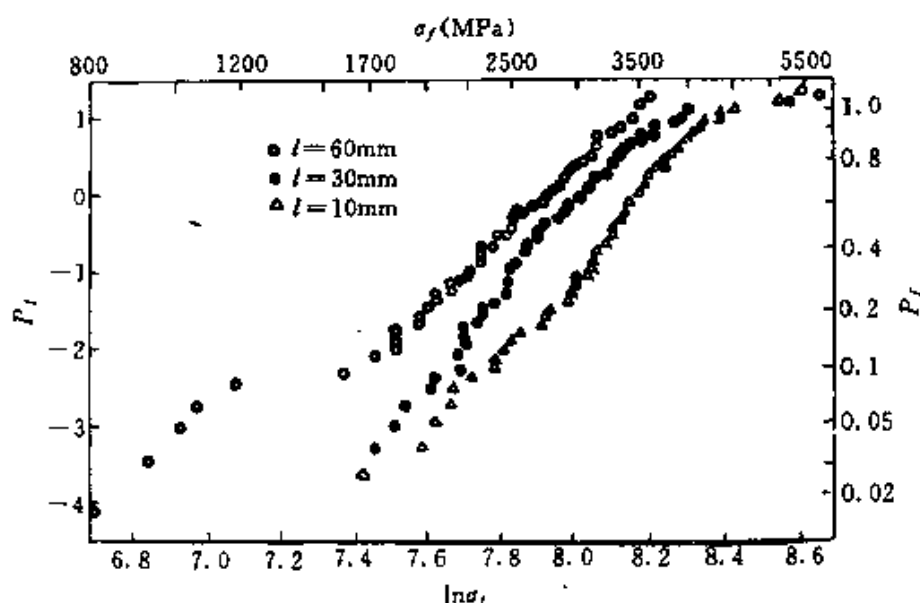


图 3.15 三种长度碳纤维强度分布^[4]

§ 3.3 纤维束的强度分布

已知单根纤维强度服从于 Weibull 分布的条件下,如何确定由多根纤维组成的纤维束的分布可以说是属于复合材料细观力学研究领域的最早的问题。1945 年, Daniel^[16]曾经证明了,当纤维的数目趋于无穷大时,纤维束的强度应服从于正态分布。随后, Coleman^[15], Kelly^[17], Epstein^[18], Phoenix 及 Taylor^[19], Phoenix^[20], Smith 及 Phoenix^[21], McCartney 及 Smith^[22], Smith^[23], Harlow^[24]等针对这类问题作了大量有意义的工作。如下,我们将详尽介绍求解纤维束强度分布的细观力学模型,含有有限根纤维的纤维束强度分布的近似计算方法,以及纤维束的应力-应变关系。

研究一束由 n 根纤维组成的纤维束,在拉伸载荷 $n\Sigma$ 的作用。设各根纤维的强度为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 不失一般性,可以令 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, 即将其纤维强度由小到大排列。在外载作用下,很显然,强度最低的纤维将首先断裂,而后,这根纤维承担的载荷将平均分担给其余还未断裂的 $n-1$ 根纤维。再随着载荷增加,强度第二弱

的纤维也将断裂,再进行载荷平均分配。如果在某一临界载荷的作用下,这种破坏过程一直持续下去,直至导致强度最大的纤维也发生断裂,这时纤维束已整体发生破坏,而所对应的临界载荷 Σ_n 即为纤维束的强度。因此,纤维束的强度可以表示成

$$\Sigma_n = \max\{x_1, (\frac{n-1}{n})x_2, \dots, (\frac{1}{n})x_n\} \quad (3.137)$$

如果 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 均是具有相同分布的随机变量,利用极值统计学原理, Daniel 已经证明了,当 $n \rightarrow \infty$ 时,纤维束强度 Σ_n 服从于如下的正态分布,

$$f(\Sigma_c) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\Sigma_c - \langle \Sigma_c \rangle)^2}{2S^2}\right] \quad (3.138)$$

式中,平均强度 $\langle \Sigma_c \rangle$ 及均方差分别为

$$\langle \Sigma_c \rangle = \Sigma_m [1 - F(\Sigma_m)] \quad (3.139)$$

$$S = \Sigma_m \{F(\Sigma_m)[1 - F(\Sigma_m)]\}^{1/2} n^{-1/2} \quad (3.140)$$

式中, $F(\Sigma_m)$ 为单根纤维强度的概率分布函数。 Σ_m 为使得 $\Sigma[1 - F(\Sigma)]$ 最大的纤维应力,由下式确定,

$$\frac{d}{d\Sigma} \{\Sigma[1 - F(\Sigma)]\}_{\Sigma=\Sigma_m} = 0 \quad (3.141)$$

如果假设单根纤维的强度服从于 Weibull 分布(3.132)式,则将(3.132)式代入上述式中可以得到

$$\Sigma_m = \sigma_0 (L\beta)^{-1/\beta} \quad (3.142)$$

纤维束平均强度为

$$\langle \Sigma_c \rangle = \sigma_0 (L\beta e)^{-1/\beta} \quad (3.143)$$

纤维束的平均强度与单根纤维的平均强度之比为

$$\alpha = \frac{\langle \Sigma_c \rangle}{\langle \sigma_f \rangle} = [\beta^{1/\beta} \exp(\beta^{-1}) \Gamma(1 + \frac{1}{\beta})]^{-1} \quad (3.144)$$

α 被称为 Coleman 因子。很显然,纤维束的平均强度总是低于纤维的平均强度,只有当纤维的强度无任何分散时, α 才等于 1。另一条重要的结论是 α 并不依赖于纤维的长度,这表明纤维束强度对纤

维长度的依赖性质同单根纤维对长度的依赖性质一样。图 3.16 绘出了 α 参数随 β 指数的变化曲线。

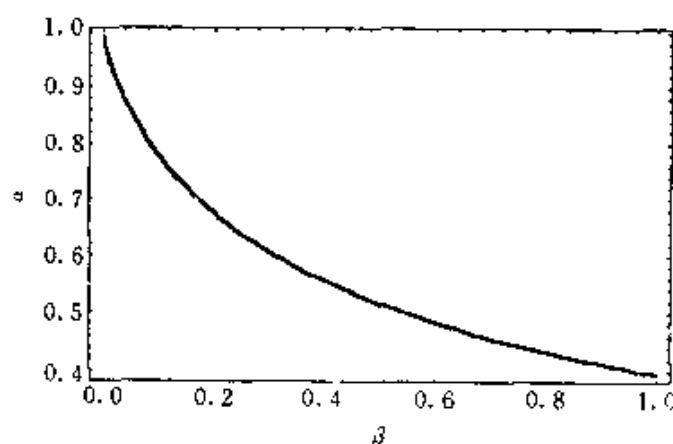


图 3.16 纤维束平均强度比值与纤维平均强度随 β 参数变化曲线

Daniel 模型仅仅证明了当纤维数目趋于无穷时,纤维束的强度服从于正态分布。然而,对于工程实际问题,纤维束中的纤维数目的确比较大,但又是有限值,这种情况下,实验证明,Daniel 模型给出的结果同实验值相差较大。如何正确计算含有有限根纤维的纤维束的强度分布是工程实际中迫切需要解决的问题。

考虑一束由 N 根纤维组成的纤维束,在外加拉伸载荷 Σ 的作用下,令

$$\sigma_r^N = \frac{\Sigma}{N-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.145)$$

式中, σ_r^N 为 r 根纤维断裂后,其余 $N-r$ 根未断裂纤维承担的应力,很显然

$$\sigma_0^N < \sigma_1^N < \dots < \sigma_{N-2}^N < \sigma_{N-1}^N \quad (3.146)$$

令 $F(\sigma)$ 为当载荷由 0 增至 σ 时纤维的破坏概率,而 $P_r(\sigma) = 1 - F(\sigma)$ 为不破坏的概率。很显然,当 N 根纤维的强度 $S_1, S_2, \dots, S_N$ 满足如下条件时,整束纤维都将断裂,

$$0 \leq S_1 \leq \sigma_0^N, S_1 \leq S_2 \leq \sigma_1^N, \dots, S_{N-1} \leq S_N \leq \sigma_{N-1}^{(N)} \quad (3.147)$$

因此,在载荷 Σ 的作用下, N 根纤维断裂的概率为

$$P^N(\Sigma) = N! \int_0^{\sigma_0^N} f(s_1) ds_1 \int_{s_1}^{\sigma_1^N} f(s_2) ds_2 \cdots \int_{s_{N-1}}^{\sigma_{N-1}^N} f(s_N) ds_N \quad (3.148)$$

式中, $f(s) = \frac{\partial F(s)}{\partial s}$ 为纤维强度的概率密度函数。

令 $t_r = F(s_r), r = 1, 2, \dots, N$, 可以得到

$$P^N(\Sigma) = N! \int_0^{1-x_0^N} dt_1 \int_{t_1}^{1-x_1^N} dt_2 \cdots \int_{t_{N-1}}^{1-x_{N-1}^N} dt_N, N \geq 1 \quad (3.149)$$

式中, $x_r^N = P_r(\sigma_r^N), r = 0, 1, \dots, N-1$ 。即使利用计算机也很难通过(3.149)式计算得到 N 根纤维的强度分布, 因此, 我们下面将介绍 N 根纤维破坏概率的两种计算方法。

定义函数 $\varphi_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ 如下:

$$\varphi_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = N! \int_0^{1-x_0} dt_1 \int_{t_1}^{1-x_1} dt_2 \cdots \int_{t_{N-1}}^{1-x_{N-1}} dt_N, N \geq 1 \quad (3.150)$$

式中, $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} > 0$ 。如果 x_r 是当应力由 0 增至 σ_1^N 时纤维仍然不破坏的概率, 即

$$P^N(\Sigma) = \varphi_N(x_0^N, x_1^N, \dots, x_{N-1}^N) \quad (3.151)$$

式中

$$x_r^N = P_r(\sigma_r^N), \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.152)$$

在总数为 N 的纤维束中, 恰好指定的某 r 根纤维的断裂概率为 $\varphi_r(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})x_r^{N-r}$, 乘式中第 1 项表示 r 根纤维断裂的概率, 而后半部分表示剩余的 $N-r$ 根纤维不断裂的概率。这样, 在有 N 根纤维的纤维束中有任何 r 根纤维的断裂概率为

$$\binom{N}{r} \varphi_r(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) x_r^{N-r}, r = 0, 1, \dots, N$$

式中, $\varphi_0 = 1$ 。一束纤维在外载荷的作用下, 可能出现的事件不外乎, 没有纤维断裂, 1 根纤维断裂, 2 根纤维断裂 ..., 所有 N 根纤维均断裂, 由概率归一化原理, 可以得到

$$\sum_{r=0}^N \binom{N}{r} \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) x_r^{N-r} = 1 \quad (3.153)$$

可以将(3.153)式表示成一迭代格式如下:

$$\varphi_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = 1 - \sum_{r=0}^{N-1} \binom{N}{r} \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) x_r^{N-r} \quad (3.154)$$

利用(3.154)式可以逐次求得1根纤维的破坏概率,2根纤维的破坏概率,⋯直至N根纤维的破坏概率如下:

$$P^N(\Sigma) = 1 - \sum_{r=0}^{N-1} \binom{N}{r} \varphi^N\{P, (\sigma_r^N)\}^{N-r} \quad (3.155)$$

式中, $\varphi_r^N, r = 0, 1, \dots, N-1, \varphi_0^N = 1$, 可由下式求得,

$$\varphi_m^N = 1 - \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m}{r} \varphi^N\{P, (\sigma_r^N)\}^{m-r} \quad (3.156)$$

对于给定的外加载荷,可以利用(3.155)及(3.156)式计算求得任意根纤维的破坏概率,然而,实际计算表明,这种计算过程将带来较大误差。因此,有必要改正一下具体算法。

利用(3.153)式,可以证实,

$$\sum_{m=0}^N \binom{N}{m} Z^{N-m} \left\{ \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) x_r^{m-r} \right\} = (1+Z)^N \quad (3.157)$$

因为上式括号中的项等1。利用如下等式

$$\binom{N}{m} \binom{m}{r} = \binom{N}{r} \binom{N-r}{m-r} \quad (3.158)$$

并改变m及r的求和次序,可以导出

$$\sum_{r=0}^N \binom{N}{r} \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) (z + x_r)^{N-r} = (1+Z)^N \quad (3.159)$$

这样,可以建立如下顺序求解方程,

$$\varphi_N(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}) = (1+z)^N - \sum_{r=0}^{N-1} \binom{N}{r} \varphi(x_0, x_1, \dots,$$

$$x_{r-1})(z + x_r)^{N-r} \quad N \geq 1, \varphi_0 = 1 \quad (3.160)$$

在利用(3.160)式时,可以自由选择参数 Z 。如选取 $Z = -x_{N-1}$,且 $x_r = P_r(\sigma_r^N)$, $r = 0, 1, \dots, N-1$, 纤维束的破坏概率为

$$P^N(\Sigma) \approx \{1 - P_r(\sigma_{N-1}^N)\}^N - \sum_{r=0}^{N-1} \binom{N}{r} \Phi_r^N \{P_r(\sigma_r^N) - P_r(\sigma_{N-1}^N)\}^{N-r} \quad (3.161)$$

式中, Φ_r^N , $r = 0, 1, \dots, N-1$ 由下式确定, $\Phi_0^N = 1$,

$$\Phi_m^N = \{1 - P_r(\sigma_{m-1}^N)\}^m - \sum_{r=0}^{m-1} \binom{m}{r} \Phi_r^N \{P_r(\sigma_r^N) - P_r(\sigma_{m-1}^N)\}^{m-r} \quad m = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.162)$$

计算表明,利用(3.161)式及(3.162)式计算纤维束的破坏概率时,可以取得很好的效果,减少计算误差。

根据 Daniel 定理我们知道,当纤维数目趋于无穷时。纤维束的强度服从于正态分布,其平均强度及均方差由(3.139)及(3.140)式决定。很遗憾的是,纤维束强度分布收敛很慢。因此,可以用如下近似形式来做为纤维束的强度分布。

(1) 纤维束的强度服从于正态分布,但其平均值由下式决定

$$\langle \Sigma_c^1 \rangle = \langle \Sigma_c \rangle + 0.996N^{-2/3}B \quad (3.163)$$

式中, N 为纤维数目, $\langle \Sigma_c \rangle$ 由(3.139)式决定,并且

$$B^3 = \left\{ \frac{dF}{d\Sigma}(\Sigma_m) \right\}^2 \Sigma_m^3 / \left\{ 2 \cdot \frac{dF}{d\Sigma}(\Sigma_m) + \Sigma_m \frac{d^2F}{d\Sigma^2}(\Sigma_m) \right\} \quad (3.164)$$

(2) 纤维束的强度服从于正态分布,但其均值及均方差分别由(3.163)式及下式决定

$$S^1 = (S^2 - 0.317N^{-1/3}B^2)^{1/2} \quad (3.165)$$

令 ΔP_1^2 及 ΔP_2^2 分别为第1种近似方法及第2种近似方法计算得到的破坏概率与计算机模拟得到的真实结果(3.161)式之差。当单根纤维的强度服从于 Weibull 分布,相应于不同的 β 值, ΔP_r 随 Σ/Σ_m 变化曲线如图 3.17 ~ 图 3.20 所示。

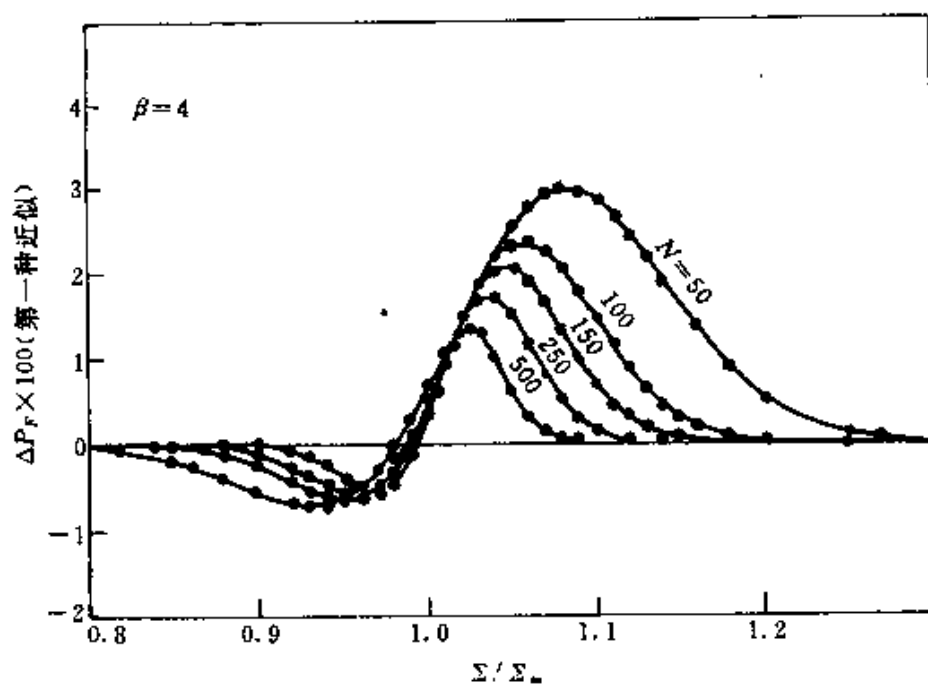


图 3.17 $\beta=4$ 时, ΔP_F 随 Σ/Σ_m 变化曲线^[22]

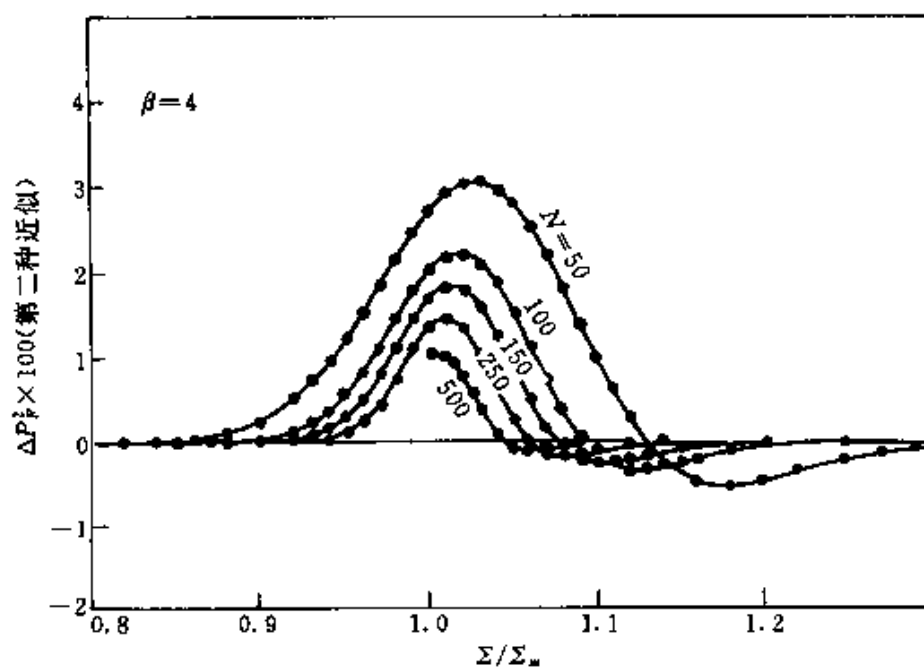


图 3.18 $\beta=4$ 时, ΔP_F^2 随 Σ/Σ_m 变化曲线^[22]

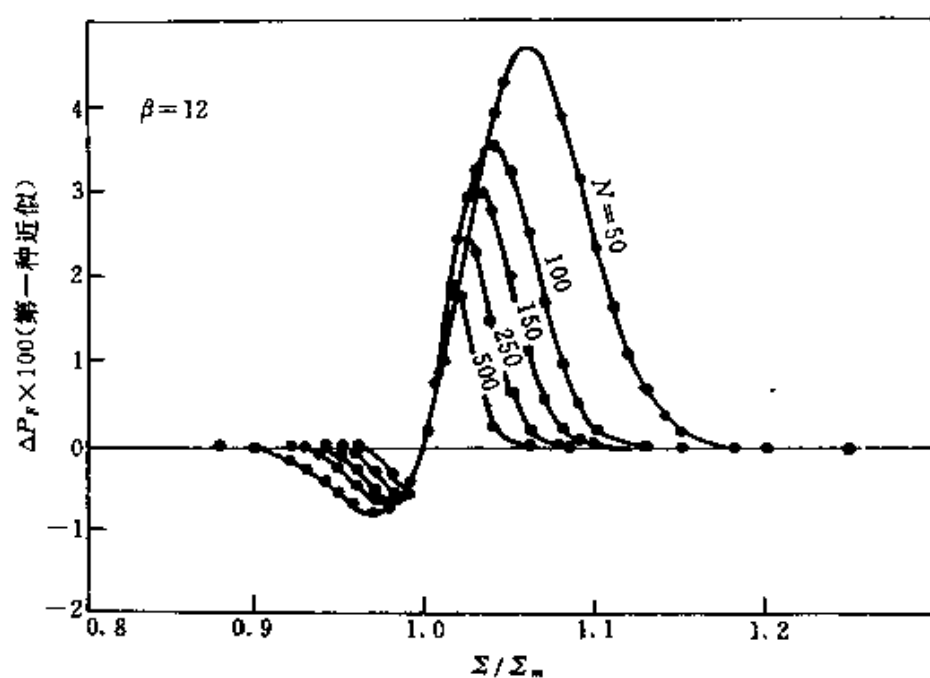


图 3.19 $\beta=12$ 时, ΔP_F 随外载 Σ/Σ_m 变化曲线^[22]

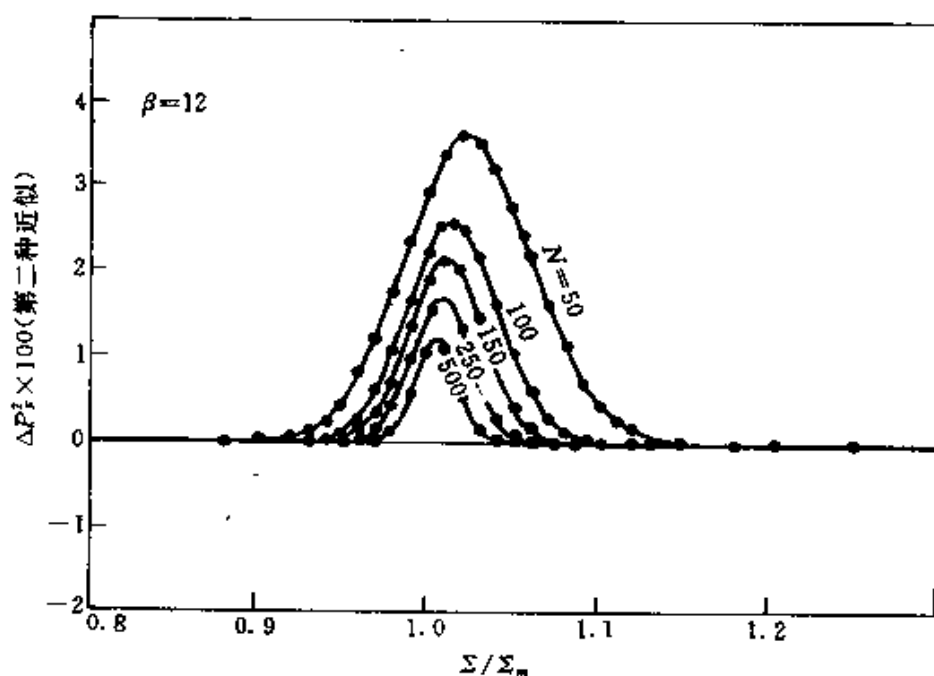


图 3.20 $\beta=12$ 时, ΔP_F 随外载 Σ/Σ_m 变化曲线^[22]

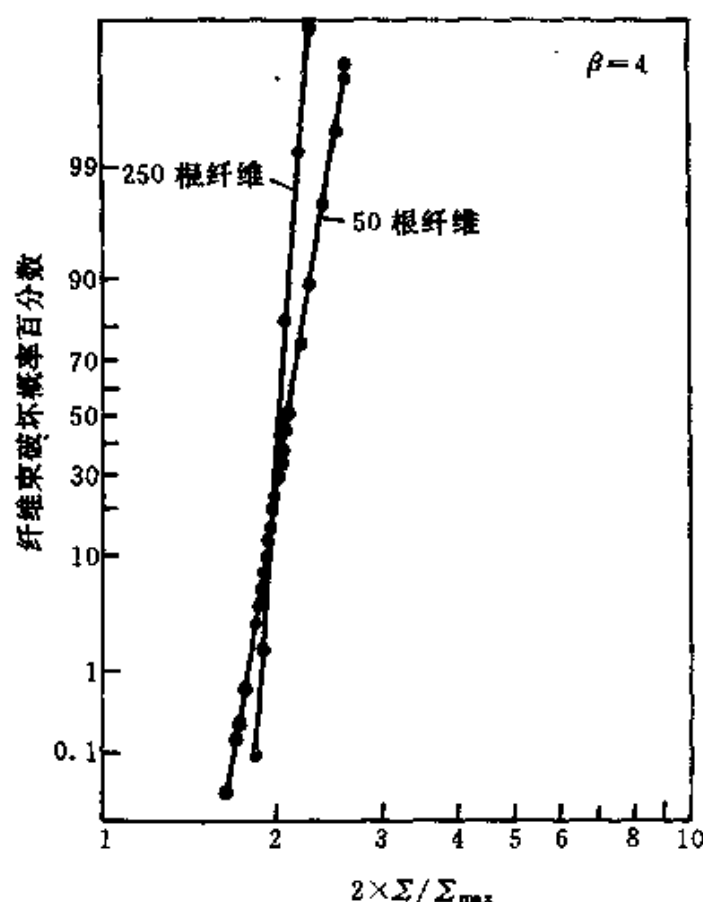


图 3.21 在正态分布概率纸上的纤维束强度分布^[22]

计算机模拟得到的在不同外载条件下纤维束的破坏概率在正态概率纸上如图 3.21 所示。从图中可以发现,无论对于纤维数目为 50 还是 250 情况下,破坏概率在正态概率纸上均为一直线,这说明纤维束的强度的确服从于正态分布。图 3.22 中画出了纤维束强度的概率密度曲线,其中 P_0^1, P_1^1, P_2^1, P^1 分别为 Daniel 近似及上文所述的第一种近似及第二种近似以及计算机模拟所得到的结果。从图中可以看出,无论是第一种近似(3.163)式还是第二种近似(3.164)式,其结果都远好于 Daniel 近似。因为计算机模拟结果(3.161)式基本上可以认为是准确的结果。

最后,我们考察一下一束纤维在控制应变加载条件下的载荷-应变关系。假设单根纤维的强度服从 Weibull 分布,且其应力-应

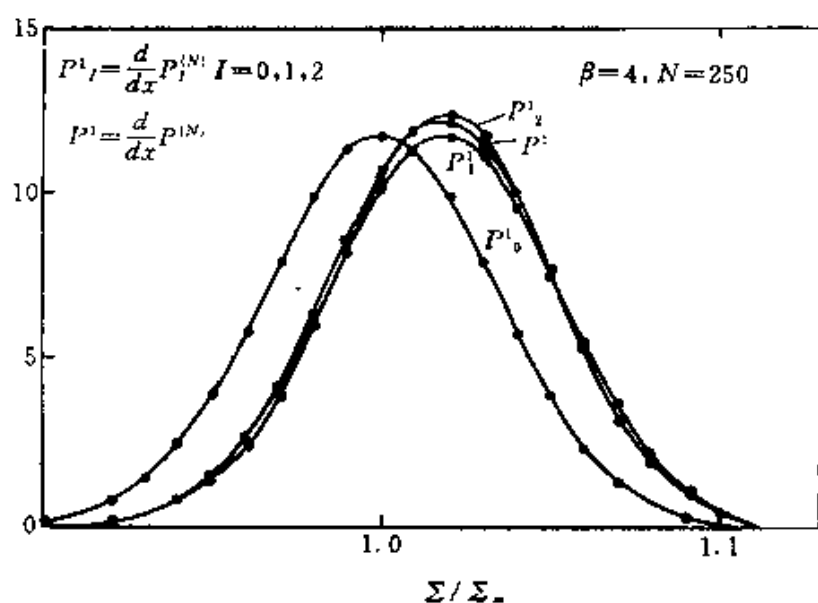


图 3.22 纤维束强度分布密度曲线及其近似值^[22]

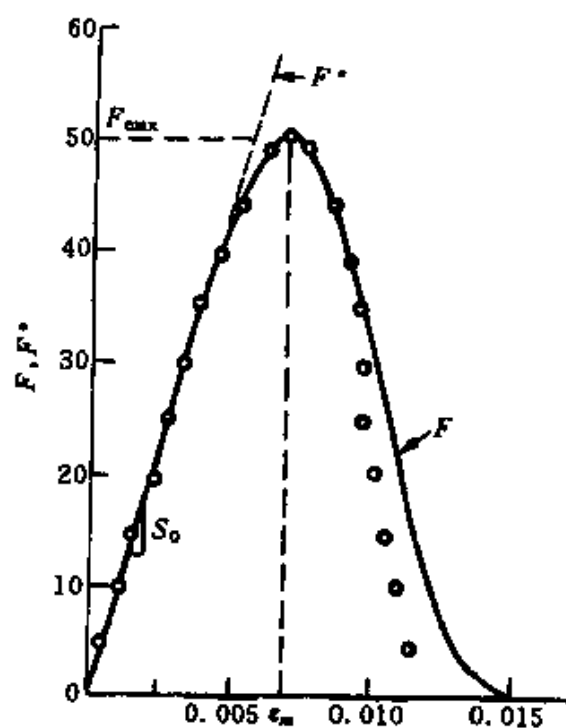


图 3.23 碳纤维束的载荷与应变理论及实验曲线^[9]

变关系服从虎克定律,即

$$\sigma_f = E_f \epsilon_f \quad (3.166)$$

式中, E_f 为纤维拉伸模量, 则以应变表示纤维强度分布为

$$P_f(\epsilon_f) = 1 - \exp\left[-L\left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_0}\right)^\beta\right] \quad (3.167)$$

考察一束由 N_0 根纤维组成的纤维束, 在外加应变为 ϵ_f 时, 其未断裂的平均纤维数目 N 为

$$N = N_0[1 - P_f(\epsilon_f)] = N_0 \exp\left\{-L\left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_0}\right)^\beta\right\} \quad (3.168)$$

则纤维束所承受的载荷为

$$F = \sigma_f AN = AE_f \epsilon_f N_0 \exp\left[-L\left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_0}\right)^\beta\right] \quad (3.169)$$

式中, A 为纤维的横截面积。(3.169) 式给出了纤维束外加应变与其所承受的载荷之间的定量关系。其变化曲线连同关于碳纤维束的实验值如图 3.23 所示。根据(3.169)式, 载荷与应变 ϵ_f 之间曲线是连续及光滑的, 在 $\epsilon_f = 0$ 处, 曲线的斜率为

$$S_0 = AE_f N_0 \quad (3.170)$$

F 与 ϵ_f 曲线的极值点 ϵ_m 由 $dF/d\epsilon_f = 0$ 确定为

$$\epsilon_m = \epsilon_0 \left(\frac{1}{L\beta}\right)^{1/\beta} \quad (3.171)$$

相应的最大载荷为

$$F_{\max} = AN_0 E_f \epsilon_0 \left(\frac{1}{L\beta e}\right)^{1/\beta} \quad (3.172)$$

式中, $e = 2.71828\cdots$ 。

从坐标原点 $\epsilon_f = 0$ 到曲线的根值点 ϵ_m 处直线的斜率为

$$S = F_{\max}/\epsilon_m = S_0 \left(\frac{1}{e}\right)^{1/\beta} \quad (3.173)$$

这样, 可以得到

$$\beta = 1/\log\left(\frac{\epsilon_m S_0}{F_{\max}}\right) \quad (3.174)$$

因此, 可以通过纤维束的试验, 再利用(3.174)式确定分布指数 β 。

§ 3.4 单向纤维增强复合材料强度预报

沿纤维方向的拉伸强度是复合材料最重要的性能。而单向纤维增强复合材料是近代复合材料结构的基本单元。如何依据纤维、基体及界面的性能正确预报复合材料的宏观强度是细观力学的基本问题,也具有深远的工程应用背景。因为复合材料的许多参数具有可设计性,而且材料本身又是各向异性的,这样,仅仅将依赖于宏观性能实验测试的结果作为复合材料的性能指标是远远不能满足工程需要的。为了建立正确的模型预报单向纤维增强复合材料的强度性能,必须考虑如下几方面关键因素:(1)作为复合材料增强相的纤维或纤维束的强度是随机变量,复合材料在拉伸载荷的作用下,某些较弱的纤维可以会首先发生断裂;(2)较弱的纤维断裂后,其余未断裂的纤维将承担更大的应力,那么,随着复合材料损伤的继续,未断裂的纤维如何分担外加载荷是复合材料强度模型的最关键的问题。因此,根据复合材料的破坏机理可以归纳如下:复合材料强度的细观力学模型应该是统计模型,而且应该考虑到复合材料在外载作用下的损伤演化过程。

§ 3.4.1 均匀载荷分担模型

最早,Parratt^[25]发现脆性纤维增强复合材料的拉伸破坏是由于基体中的纤维已经断裂成很短的部分,由于界面及基体强度的限制,它们已经无法再承担更大的外加载荷而致。在这样的实验基础上,Rosen^[26]根据 Gucer 及 Gurland^[27]提出的最弱环模型,首先将单向纤维增强复合材料沿纤维方向分成许多长度为 δ 的环,任一环的破坏都会导致复合材料的破坏,因此,复合材料的强度应该等同于最弱环的强度。而且他认为任一环的部分纤维破坏后,其余未破坏的纤维将均匀承担外载。如果不考虑基体的作用,任一环的强度分布即等同于长度为 δ 的纤维束的强度分布。 δ 被称为无效长度,它的物理意义是指纤维一处断裂后,纤维所承担的应力由零

基本恢复至外加载荷所需的长度。在这样的模型中,基体还是起到传递载荷作用。因为如果没有基体,纤维一旦破坏后,就没有任何存在的价值了,而含有基体时,纤维断裂后,无效长度仅限于 δ 段。而且,由于 δ 远小于纤维的长度 L ,其强度也应该较高。Harlow 及 Phoenix^[28,29] 及 Scop 及 Argon^[30,31] 等都较详尽地研究了这类载荷均匀分布模型。

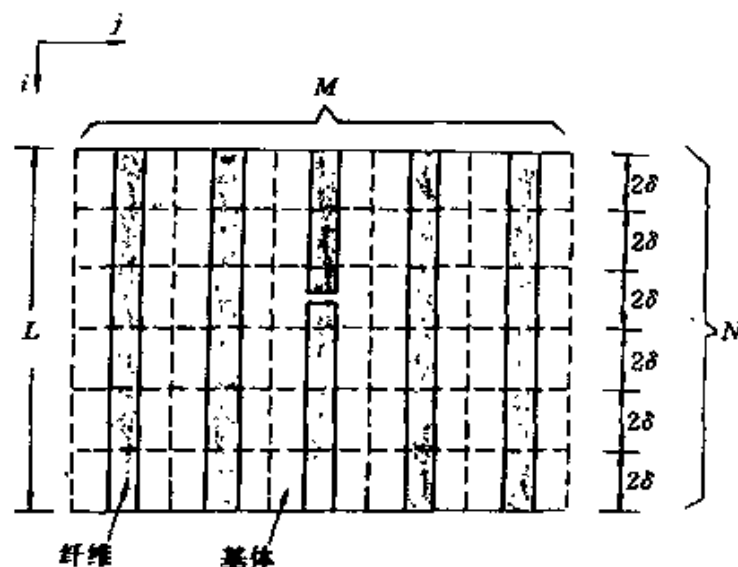


图 3.24 复合材料强度的最弱环模型

如果任一环中纤维的数目为 M ,那么任一环的强度分布相当于长度为 δ 的纤维束的强度分布,其形式在上节中已经进行了详尽的研究。设其概率分布为 $F_b(\sigma_c)$,密度函数为 $f_b(\sigma_c)$,其中 σ_c 为纤维所承担的平均应力。如果试件沿纤维方向长度为 L ,无效长度可利用剪滞法求得(3.18)式,则复合材料中环的数目为 $N = L/\delta$ 。

根据最弱环理论,可以求得当外加载荷由 σ_c 增至 $\sigma_c + \Delta\sigma_c$ 时, N 个环中至少有一个环已经破坏的概率 $p_c(\sigma_c)\Delta\sigma_c$,

$$p_c(\sigma_c)\Delta\sigma_c = \Delta p_f \cdot P_s \quad (3.175)$$

式中, P_s 为当 $0 \leq \sigma \leq \sigma_c$ 时, N 个环无一破坏的概率,由下式决定

$$P_s = [1 - F_b(\sigma_c)]^N \quad (3.176)$$

Δp_f 为某一环在 $0 \leq \sigma \leq \sigma_c$ 不破坏的条件下, $\sigma_c \leq \sigma \leq \sigma_c + \Delta \sigma_L$ 时发生破坏的概率,

$$\Delta p_f = N f_b(\sigma_c) \Delta \sigma_c / [1 - F_b(\sigma_c)] \quad (3.177)$$

将(3.175), (3.177)式代入(3.174)式中,可以得到复合材料强度的概率密度函数

$$P_c(\sigma_c) = N f_b(\sigma_c) [1 - F_b(\sigma_c)]^{N-1} \quad (3.178)$$

复合材料的强度均值可由下式确定:

$$\frac{d}{d\sigma_c} [p_c(\sigma_c)]|_{\sigma_c=\sigma_c^*} = 0 \quad (3.179)$$

将(3.178)式代入(3.179)式,可以得到

$$\sigma_c^* = \langle \sigma_b \rangle - S_b (2 \cdot \ln N)^{1/2} + S_b \frac{\ln \ln N + \ln 4\pi}{2(2 \ln N)^{1/2}} \quad (3.180)$$

式中, $\langle \sigma_b \rangle$ 及 S_b 分别为长度为 δ 的纤维束的平均强度及方差, 它们分别由(3.139)及(3.140)式确定。

从(3.180)式可以发现,当复合材料尺寸很大 $M \gg 1$ 时, $S_b \rightarrow 0$, 则(3.180)式成为

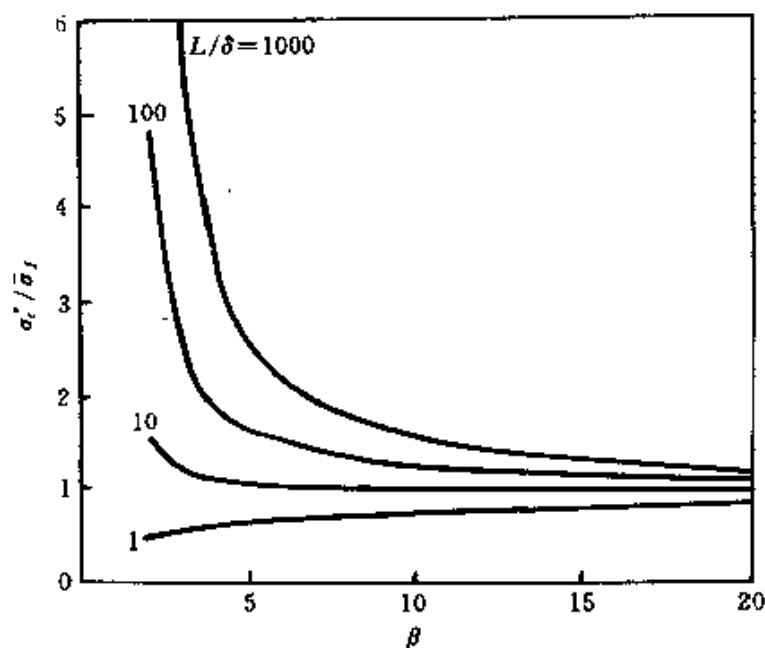


图 3.25 复合材料平均强度与纤维平均强度的比值曲线^[9]

$$\sigma_c^* = \sigma_0(\delta\beta e)^{-1/\beta} \quad (3.181)$$

(3.181)式即为长度为 δ 的纤维束的平均强度。

比较一下与复合材料具有同样长度的纤维的平均强度 $\langle \sigma_f \rangle$ ，如图 3.25 所示，可以得到一些很有趣的结论。当纤维长度小于无效长度 δ 时，复合材料的强度小于纤维的平均强度。当纤维长度大于 δ 时，复合材料的平均强度大于纤维的平均强度。而且，当纤维强度分散度较小时($\beta > 8$)，复合材料强度近似等于纤维的平均强度。

§ 3.4.2 局部载荷分担模型

当复合材料中的某根纤维断裂后，由于应力集中的原因，它周围的纤维将承担更大的载荷，因此，它们破坏的概率也较大。如果不考虑这种应力集中的影响(如 Rosen 模型)，预报的复合材料强度值将高于实验值。因此，许多成功的模型都考虑到了这种应力集中的影响，这类模型被称为局部载荷分担模型，例如，Zweben^[32]，Zweben 及 Rosen^[33]，Fukuda 及 Kawata^[34]，Harlow^[35]，Phoenix^[36]，Harlow 及 Phoenix^[37,38,39]，Smith^[40,41]，Smith 及 Phoenix^[42]，Smith, Phoenix, Greefield, Henstenburg 及 Pitt^[43]，Phoenix, Schwartz 及 Robinson^[44]，范赋群等^[12]，王彪^[45]的工作都考虑了这一问题。

考虑如图 3.24 所示的复合材料模型。其中 M 为纤维的数目， N 为长度为 δ 的纤维束的数目，这里 δ 是无效长度或载荷传递长度，长度为 δ 的单根纤维的强度服从如下 Weibull 分布，

$$F(\sigma) = 1 - \exp\{-(\sigma/\sigma_\delta)^\beta\} \quad \sigma \geq 0 \quad (3.182)$$

式中， $\sigma_\delta = \sigma_0(\frac{\delta}{L})^{-1/\beta}$ 。

一根纤维断裂后，它周围的纤维如何分担载荷可以利用前文所述的剪滞法模型来求得。为了简化数学处理，我们可以首先利用如下理想局部载荷分担方案。设外加应力为 σ ，则未断裂的纤维承担的载荷为 $K\sigma$ ，式中

$$K_r = 1 + r/2, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (3.183)$$

式中, r 为该未断裂纤维相邻两边断裂纤维的总数。

如果定义 $G_M(\sigma)$ 为由 M 根纤维组成的纤维束在外载 σ 作用下破坏概率, 在 M 较小时, 可以得到 $G_M(\sigma)$ 的准确公式, 例如 $M = 2$ 时,

$$\begin{aligned} G_2(\sigma) &= F^2(\sigma) + 2F(\sigma)[F(2\sigma) - F(\sigma)] \\ &= 2F(\sigma)F(2\sigma) - F^2(\sigma) \end{aligned} \quad (3.184)$$

(3.184) 式第一项表明在外载作用下, 两根纤维同时发生破坏, 而第二项表明在外载作用下, 一根纤维首先发生破坏, 而另一根纤维在所分担的更大的载荷作用下发生破坏, 这也是两根纤维发生破坏的唯一两种可能。当 $M = 4$ 时, 可以导出如下复杂公式,

$$\begin{aligned} G_4(\sigma) &= 16F(4\sigma)F(2\sigma)F(3\sigma/2)F(\sigma) - 4F(4\sigma)F(2\sigma)F^2(\sigma) \\ &\quad - 4F(4\sigma)F^2(3\sigma/2)F(\sigma) + 4F(4\sigma)F^3(\sigma) \\ &\quad - 8F^2(2\sigma)F(3\sigma/2)F(\sigma) + 2F^2(2\sigma)F^2(\sigma) \\ &\quad - 8F(4\sigma)F(3\sigma/2)F^2(\sigma) + 4F^2(3\sigma/2)F^2(\sigma) - F^4(\sigma) \end{aligned} \quad (3.185)$$

利用大型计算机, 人们最多可以得到 $M = 14$ 根纤维的断裂概率, 因为随着纤维数目的增加, 其破坏次序数急剧增加。这样, 如果借用 Mathematica 等数学自动推导软件也许有可能处理更大的问题, 否则必须引入一些简化假设或者对问题进行分解而得到纤维复合材料的强度分布。

如果认为由 M 根纤维组成的纤维束的破坏也遵循最弱环原理, 那么, 其破坏概率可以表示成

$$G_M(\sigma) = 1 - [1 - W_M(\sigma)]^M \quad (3.186)$$

式中, $W_M(\sigma)$ 由下式决定,

$$W_M(\sigma) = 1 - [1 - G_M(\sigma)]^{1/M} \quad (3.187)$$

Hawlow 及 Phoenix(1978)发现当 $M \rightarrow \infty$ 时, $W_M(\sigma)$ 很快地收敛于某一固定的分布 $W(\sigma)$, 即

$$W_M(\sigma) \rightarrow W(\sigma) \quad \text{当 } M \rightarrow \infty \quad (3.188)$$

式中, $W(\sigma)$ 被称为特征分布函数。图 3.26 绘出了相应脆性纤维

($\beta = 5$) 复合材料不同数目纤维 $\ln\{-\ln(1 - W_M)\}$ 随外载 $\ln(\sigma/\sigma_s)$ 变化曲线,从图中可以发现 W_M 的确很快地趋于稳态分布 $W(\sigma)$ 。

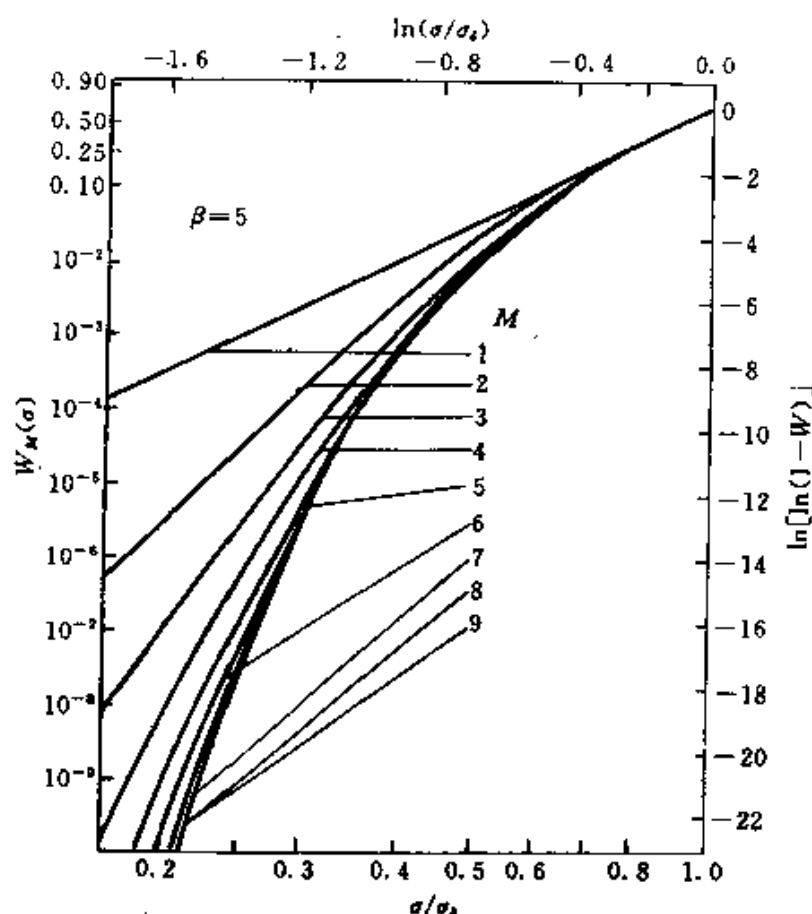


图 3.26 特征分布函数变化曲线

尽管证实存在一稳定的特征分布函数 $W(\sigma)$ 是一项很重要的工作。然而,目前人们还无法揭示 $W(\sigma)$ 的解析形式,只有利用一些近似方法求得 $W(\sigma)$ 的分布形式。一般已知了 $W(\sigma)$ 分布形式,我们立即可写出一环纤维束的强度分布为

$$G_M(\sigma) = 1 - [1 - W(\sigma)]^M \quad (3.189)$$

通常利用计算机对含有较少纤维的环的强度分布进行模拟即可求得 $W(\sigma)$ 函数,而后利用(3.189)式可以得到含有较多纤维的环的强度分布。

由于复合材料可以认为是由 N 个环串联组成的,而各环之间又是相互独立的,这样,根据最弱环理论可以得到单向纤维增强复合材料的强度分布函数 $H_{M,N}(\sigma)$,

$$H_{M,N}(\sigma) = 1 - [1 - G_M(\sigma)]^N \quad (3.190)$$

将(3.189)式代入(3.190)式中,并令 $V = MN$, 得到如下结果

$$H_{M,N}(\sigma) \approx 1 - [1 - W(\sigma)]^V \quad (3.191)$$

很显然, M 及 N 对复合材料强度分布函数的影响是相互对称的。尽管(3.191)式揭示了一种最弱环的强度分布关系,但到目前为止,人们还未发现 $W(\sigma)$ 取决于哪部分材料单元的破坏概率。

相应 β 从 3 到 50 的取值,图 3.27 绘出了 $W(\sigma)$ 函数。由 $W(\sigma)$ 曲线,可以构造出复合材料的强度分布,图 3.28 给出了这一结果。其中 $V = 10^6$,而且曲线是绘在 Weibull 概率纸上的。从图 3.28 中,我们可以得到如下一些结论:(1) 几乎所有的概率分布曲线均为直线,这表明复合材料的强度基本服从 Weibull 分布。(2) 直线的斜率略有变化,当纤维的 β 参数在 50 至 3 之间变化时,复合材料相应的 β 值在 50 至 20 之间变化。(3) 复合材料的平均强度明显依赖于纤维强度的分散度参数 β ,当纤维强度的分散性增强时,复合材料的平均强度显著降低。当 $\beta = 7$ 时,复合材料的强度大约仅相当于 δ 长纤维强度的 $1/3$ 。在实验室进行单根纤维强度实验时,采用纤维的长度往往比 δ 尺寸大两个数量级。这样,复合材料的强度值大概同单根纤维的强度相当。

由于无法得到 $W(\sigma)$ 的解析表达式,在下文中,我们将致力寻找简单近似的方法求得单向纤维增强复合材料的强度分布函数。通过以后的数值分析,我们可以得到如下几点结论:(1) 复合材料的破坏应力远远小于 σ_s 值;(2) 复合材料的破坏可以认为起源于某些纤维的断裂而形成的断裂核,随后核周围的纤维相继断裂而产生类似于宏观裂纹的缺陷;(3) 可以认为断裂核的数目服从于二项分布,其均值为 $MNF(\sigma)$,式中 $F(\sigma)$ 为纤维的强度分布;(4) 在某一外载 σ 的作用下,其第 $K - 1$ 根纤维断裂的概率为

$F(K_{k-1}\sigma) < 1/2$, 而第 K 根纤维断裂的概率可表示成 $F(K_k\sigma) = 1$, 这种情况下所形成的由 K 根断裂纤维组成的缺陷将导致复合材料的整体破坏。很显然, 临界 K 值可由下式定义

$$K_{k-1}\sigma \leq \sigma_b \leq K_k\sigma \quad (3.192)$$

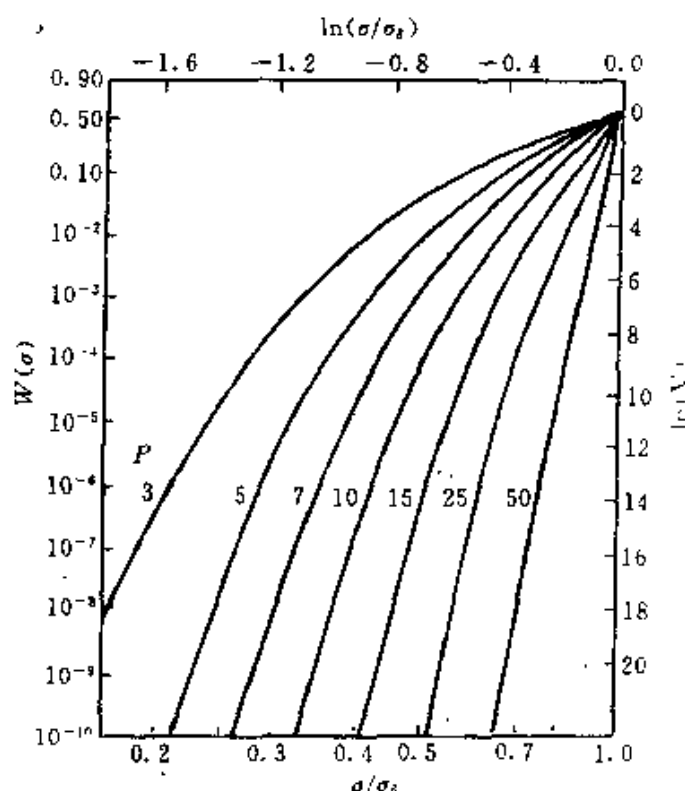


图 3.27 稳态特征分布函数计算机模拟曲线

实际上, 图 3.28 也揭示了复合材料的尺寸效应。当复合材料体积为 $MN = 10^6$ 时, 复合材料的平均强度为 $0.27\sigma_b$, 而当复合材料体积为 $MN = 10^9$ 时, 复合材料的平均强度大约为 $0.22\sigma_b$ 。根据前面的分析, 复合材料断裂起源于一些断裂核, 这些断裂核在空间的分布是相当稀疏的。例如对于体积 $MN = 10^6$ 情况, 复合材料平均强度约为 $0.27\sigma_b$, 当 $\beta = 5$ 时, $F(0.27\sigma_b) = 0.0014$, 断裂核之间的距离大约相当于这个值的倒数再乘上 δ , 大约等于 700δ 。因此, 我们可以忽略各断裂核之间的相互作用, 在外载作用下, 认为它们是独立长大的。

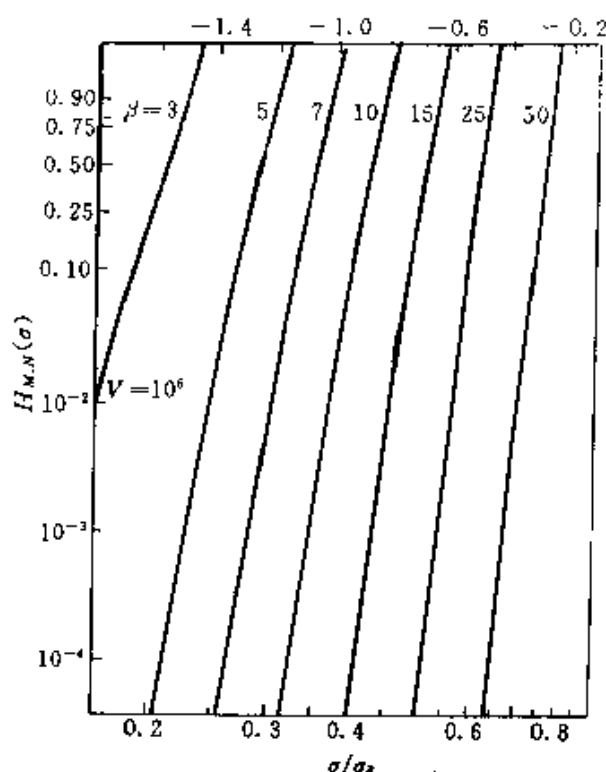


图 3.28 在 Weibull 概率纸上给出的复合材料破坏概率曲线

某一指定的纤维单元成为一断裂核并且它周围的纤维也相继破坏并成为有 K 根纤维断裂的概率为

$$P_f \approx F(\sigma)2F(K_1\sigma)2F(K_2\sigma)\cdots 2F(K_{k-1}\sigma) \quad (3.193)$$

式中, 2 表明在缺陷扩展的每一步, 均有两种选择。很明显, (3.193) 式描述了一种简单的缺陷扩展模式, 它适用于 $F(K_j\sigma) \gg F(K_{j-1}\sigma)$ 的情形。这种情况下, 每一步都是最靠近缺陷的纤维断裂。

将纤维的强度分布函数进行 Taylor 展开, 可以得到

$$F(\sigma) \approx (\sigma/\sigma_0)^\beta \quad (3.194)$$

因为, 对于实际情况 $\sigma \ll \sigma_0$, 这样, (3.194) 式的近似是比较合理的。将 (3.194) 式代入 (3.193) 式中, 得到

$$P_f = 2^{K-1}(K_1K_2\cdots K_{k-1})^\beta \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{K\beta} \quad (3.195)$$

如果复合材料含有纤维段的数目为 MN , 也即潜在断裂核的数目为 MN , 那么, 任何一个断裂核的破坏均会导致复合材料的破坏, 因此, 利用最弱环原理可以得到复合材料的强度分布函数,

$$\begin{aligned} H_{M,N}(\sigma) &= 1 - [1 - P_f]^{MN} \\ &= 1 - [1 - 2^{k-1}(K_1 K_2 \cdots K_{k-1})^\beta (\sigma/\sigma_s)^{K\beta}]^{MN} \\ &\approx 1 - \exp\{-MN 2^{k-1}(K_1 K_2 \cdots K_{k-1})^\beta (\sigma/\sigma_s)^{K\beta}\} \end{aligned} \quad (3.196)$$

可以发现, (3.196) 式基本为 Weibull 分布曲线, 只是材料的分散性相对于纤维来说已明显变小。

下面, 我们将发展一种方法计算特征分布函数 $W(\sigma)$ 。首先令

$$F^{(k)}(\sigma) = 1 - \exp\{-d_k(\sigma/\sigma_s)^{k\beta}\} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.197)$$

式中, $d_k = 2^{k-1}(K_1 K_2 \cdots K_{k-1})^\beta$ 。

采用如下方式对应力区间 $0 \leq \sigma \leq \sigma_s$ 进行分割

$$\sigma_s/K_k < \sigma \leq \sigma_s/K_{k-1} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.198)$$

这样, 等式(3.196)成为

$$H_{M,N}(\sigma) = 1 - [1 - F^{[K]}(\sigma)]^{MN} \quad (3.199)$$

将(3.199)式同(3.191)式进行比较, 可以得到

$$W(\sigma) \approx F^{[K]}(\sigma) \quad (3.200)$$

图 3.28 绘出了 $\beta = 5$ 时, 特征分布函数 $W(\sigma)$ 的计算机模拟曲线及 $K = 1, 2, 3, \dots$ 时, $F^{[K]}(\sigma)$ 曲线, 可以发现如将 $W(\sigma)$ 值取为

$$W(\sigma) \approx \min\{F^{[1]}(\sigma), F^{[2]}(\sigma), \dots\} \quad (3.201)$$

可以得到很好的效果。

如下, 我们将寻找一些工程实用的计算复合材料破坏概率中材料参数的方法, 将(3.197)式代入(3.199)式中, 可以得到复合材料强度为如下 Weibull 分布,

$$H_{M,N}(\sigma) = 1 - \exp\{-(\sigma/\sigma_{k,MN})^{k\beta}\} \quad (3.202)$$

式中

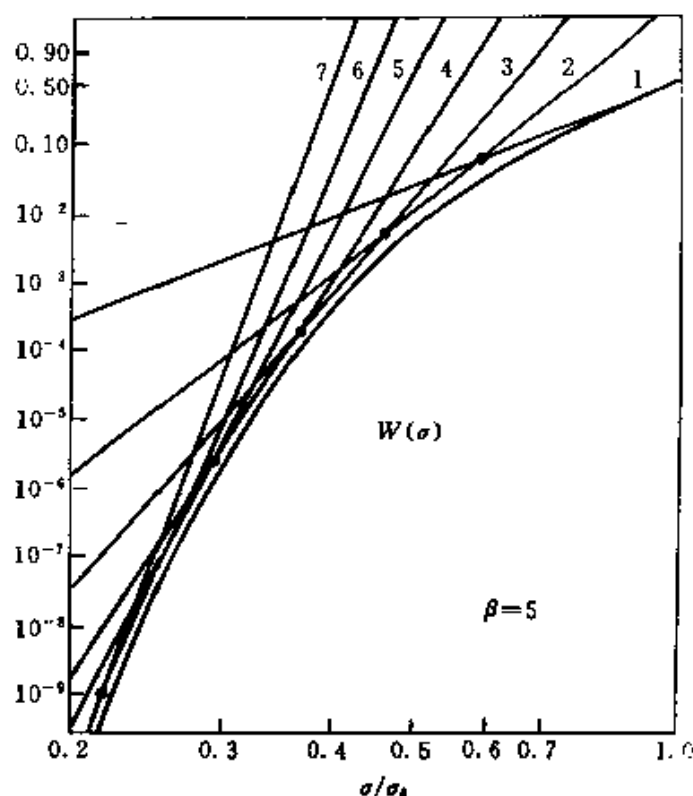


图 3.29 $W(\sigma)$ 的计算机模拟曲线及 $F^{[K]}(\sigma)$ 曲线

$$\sigma_{k,MN} = \sigma_0 (MN d_k)^{-1/k\beta} \quad (3.203)$$

在(3.202)式中, k 相当于临界裂纹长度。而且, 它还决定着复合材料的强度分散性大小。采用如下方法来确定不同复合材料的 k 值。首先, k 的确定准则为

$$\sigma_0/K_k < \sigma_{k,MN} < \sigma_0/K_{k-1} \quad (3.204)$$

当 MN 很大时, 可以得到 k 值所满足的方程为

$$\gamma(k) > \ln(MN)/\beta > \gamma(k-1) \quad (3.205)$$

式中

$$\gamma(r) = r \ln(K_r) - \{\ln(K_1) + \ln(K_2) + \dots + \ln(K_{r-1})\} \quad (3.206)$$

其中, $r = 1, 2, 3, \dots, \gamma(0) = 0$ 。当应力集中因子可以表示成 $K_j = 1 + j/2$ 时, 可以将 γ 值列表如下:

表 3.1 γ 值表

r	$\gamma(r)$	r	$\gamma(r)$
0	0	5	3.15
1	0.405	6	3.95
2	0.981	7	4.78
3	1.65	8	5.62
4	2.38	9	6.48

作为一个例子,我们考察 $\beta = 5$ 的情况, $MN = 10^6$, 因此, $\ln(10^6)/5 = 2.76$, 利用(3.112)及(3.113)式可以得到 $k = 5$, 因此, 复合材料强度分布函数的形状参数为 $k\beta = 25$ 。

最后, 考察一下复合材料的尺寸效果及上述近似求解方法的适用性问题。根据 Weibull 分布特点, 复合材料的强度随体积增加而呈指数形式降低 $V^{-1/\beta}$ 。然而, 由于 k 值也随复合材料的尺寸增加而略有增加, 这样导致复合材料的尺寸效应不致于那么严重。Smith(1980, 1982)详细研究了这一问题, 并得到了如下结论,

$$\text{复合材料强度} \approx \beta 2^{1-\beta} \sigma_0 / \ln V \quad (3.207)$$

上述近似方法主要简化处在于, 复合材料破坏的每一步总是缺陷最近处的纤维顺序断裂, 这样可以写出(3.193)式。如果考虑其它复杂断裂模式, 计算表明对复合材料强度分布的尺度参数 $\sigma_{k,MN}$ 影响很小。对于三维的分析结果表明, 复合材料的强度分布形式基本不变, 只是参数 2^{k-1} 应由与纤维分布相关的更复杂参数代替。

Zweben 及 Rosen(1970)在预报复合材料强度分布时不仅考虑了载荷局部分担的效果, 而且还提出了以 2 根, 3 根或多根纤维相继断裂作为复合材料破坏的强度准则, 如下将简单介绍一下这方面的工作。

考虑如图 3.24 所示的复合材料单元, 在横截面上纤维呈规则的正方形分布(图 3.30)。设纤维段的强度分布函数为 $F(\sigma)$, 则在纤维名义载荷 σ 的作用下, 断裂的纤维段的平均数目为

$$E_1(\sigma) = MNF(\sigma) \quad (3.208)$$

不考虑断裂核之间的相互作用,而只集中研究一个断裂源的损伤演化过程。例如,如图 3.2 所示,纤维 1 已经断裂,那么由于这根纤维的断裂而导致它周围的一根纤维断裂的概率可表示成 $[F(K_1\sigma) - F(\sigma)]/[1 - F(\sigma)]$ 。由于 $F(\sigma)$ 远小于 1,因此,通常假设式中的分母等于 1。如果定义 $e_{i/1}$ 为围绕一断裂纤维的周围 $i - 1$ 根纤维由于中心的纤维断裂而导致断裂的概率,则

$$e_{2/1} = 4[F(K_1\sigma) - F(\sigma)][1 - F(K_1\sigma) + F(\sigma)]^3 \quad (3.209)$$

$$e_{3/1} = 6[F(K_1\sigma) - F(\sigma)]^2[1 - F(K_1\sigma) + F(\sigma)]^2 \quad (3.210)$$

$$e_{4/1} = 4[F(K_1\sigma) - F(\sigma)]^3[1 - F(K_1\sigma) + F(\sigma)] \quad (3.211)$$

$$e_{5/1} = [F(K_1\sigma) - F(\sigma)]^4 \quad (3.212)$$

这样,周围 4 根纤维至少有一根纤维断裂,或者说,至少形成一个由二根断裂纤维组成的缺陷的概率为

$$P_{2/1} = 1 - [1 - F(K_1\sigma) + F(\sigma)]^4 \quad (3.213)$$

因此,在外力 σ 作用下,复合材料中由二根断裂纤维构成的缺陷的平均数目为

$$E_2(\sigma) = P_{2/1}E_1(\sigma) \quad (3.214)$$

那么,至少存在一个这样缺陷的概率为

$$P_2 = 1 - [1 - F(\sigma)P_{2/1}]^{MN} \quad (3.215)$$

研究复合材料中出现三根断裂纤维的事件,这一事件可由如下二种方式产生。

a. 断裂纤维周围 4 根相邻纤维中有两根在外载 $K_1\sigma$ 作用下同时断裂,其概率为

$$P_{3/1} = P_{2/1} - e_{2/1} \quad (3.216)$$

b. 断裂纤维周围的一根纤维首先断裂,而另一根又相继断

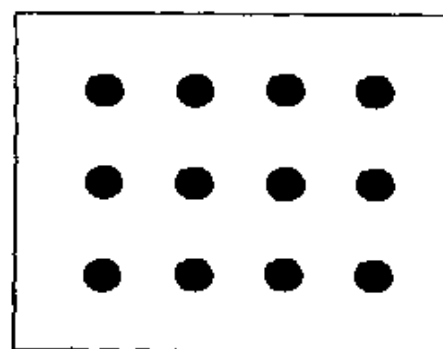


图 3.30 复合材料横截面

裂。其概率为

$$P_{3/2} = 1 - [1 - F(K_2\sigma) + F(\sigma)]^3 [1 - F(K_2\sigma) + F(K_1\sigma)]^3 \quad (3.217)$$

式中, K_2 为二根纤维断裂后的应力集中因子。因此, 复合材料中含有由三根断裂纤维组成的缺陷的平均数目为

$$E_3 = E_1(P_{3/1} + e_{2/1}P_{3/2}) \quad (3.218)$$

至少存在一个这样缺陷的概率为

$$P_3 = 1 - [1 - F(\sigma)(P_{3/1} + e_{2/1}P_{3/2})]^{MN} \quad (3.219)$$

同理, 复合材料中含有由四根断裂纤维组成的缺陷的平均数目为

$$E_4 = E_1(P_a + P_b + P_c + P_d) \quad (3.220)$$

式中

$$P_a = e_{4/1} + e_{3/1} \quad (3.221)$$

$$P_b = e_{2/1}(P_{3/2} - e_{3/2}) \quad (3.222)$$

$$P_c = e_{3/1}P_{4/3}^A \quad (3.223)$$

$$P_d = e_{2/1}e_{3/2}P_{4/3}^B \quad (3.224)$$

并且

$$\begin{aligned} e_{3/2} = & 3[F(K_2\sigma) - F(\sigma)][1 - F(K_2\sigma) + F(\sigma)]^2 \\ & \cdot [1 - F(K_2\sigma) + F(K_1\sigma)]^3 + 3[F(K_2\sigma) - F(K_1\sigma)] \\ & \cdot [1 - F(K_2\sigma) + F(K_1\sigma)]^2 [1 - F(K_2\sigma) + F(\sigma)]^3 \end{aligned} \quad (3.225)$$

$$P_{4/3}^A = 1 - [1 - F(K_3\sigma) + F(\sigma)]^4 [1 - F(K_3\sigma) + F(K_1\sigma)]^2 \quad (3.226)$$

$$P_{4/3}^B = 1 - [1 - F(K_3\sigma) + F(\sigma)]^3 [1 - F(K_3\sigma) + F(K_2\sigma)]^5 \quad (3.227)$$

而至少存在一个这样缺陷的概率为

$$P_4 = 1 - [1 - F(\sigma)(P_a + P_b + P_c + P_d)]^{MN} \quad (3.228)$$

利用前而所述的剪滞法模型, 应力集中因子可取为 $K_1 = 1.146$, $K_2 = 1.888$, $K_3 = 1.24$ 。

取纤维强度分布的形状参数 $\beta = 6$, 不同尺寸缺陷的平均数目随载荷的变化曲线如图 3.31 所示。很明显, 在材料破坏阶段, 多根断裂纤维组成的缺陷数目急剧增加。存在至少一个不同尺寸缺陷的概率, 如图 3.32 所示。从图 3.31 中, 可以得到如下结论, 复合材料的强度准则可以定为

$$E_2(\sigma) = 1 \quad (3.229)$$

即以材料中出现一个由两根断裂纤维组成的缺陷做为复合材料破坏的准则, 复合材料强度的下限值可以取为

$$E_1(\sigma) = 1 \quad (3.230)$$

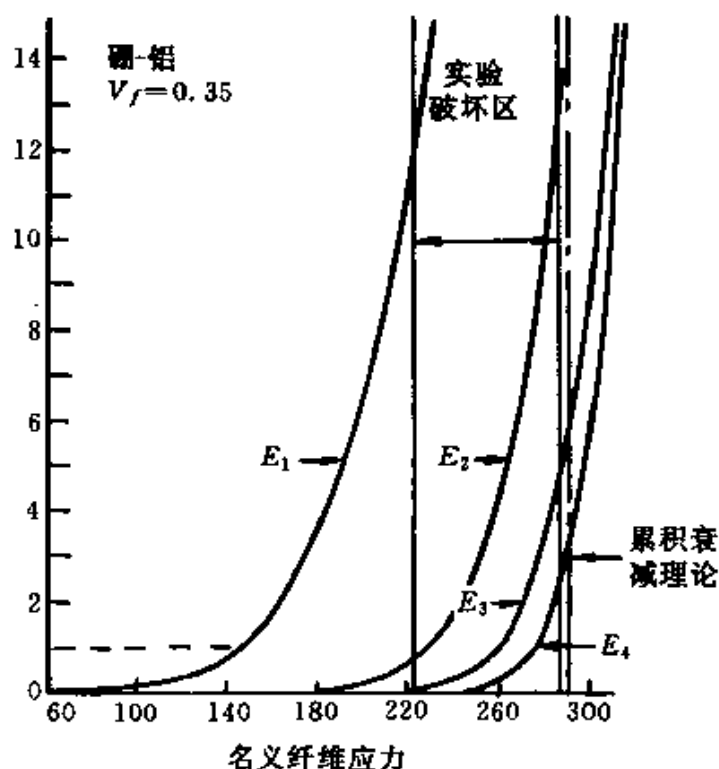


图 3.31 不同尺寸缺陷的平均数目随载荷变化曲线^[33]

Zhu 及 Zong^[46,47]等研究了单向纤维增强复合材料随拉伸载荷的增加, 损伤的演化过程, 得到了一些很好的结论。考虑如图 3.24 所示的复合材料单元, 在一环中有 M 根纤维, 设在外载 σ 作用下, M_f 根纤维已经断裂, M_n 根纤维未断裂, M_a 根纤维与断裂的

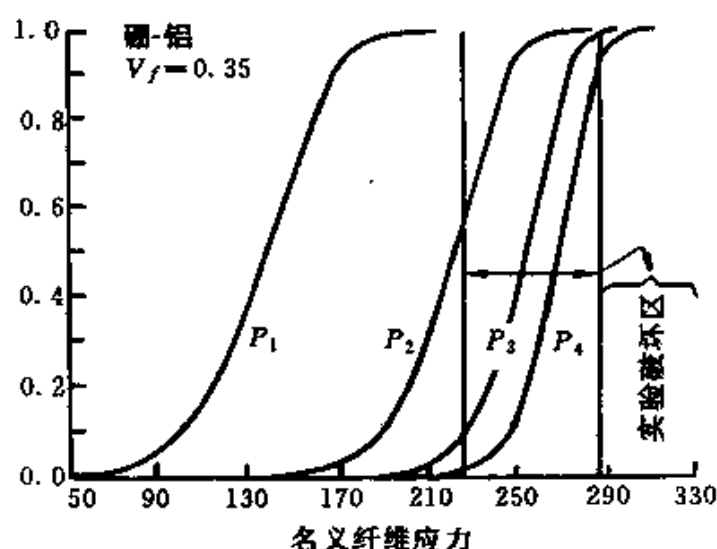


图 3.32 至少存在一个指定尺寸缺陷的概率^[33]

纤维相邻, M_i 根纤维不受断裂纤维的影响。如果与一根断裂纤维相邻的纤维数目为 a , 则

$$M_a = aM_f \quad (3.231)$$

$$M_h = M - M_f \quad (3.232)$$

$$M_i = M - (a + 1)M_f \quad (3.233)$$

$$\sigma = \frac{M_i}{M}\sigma_i + \frac{M_a}{M}K\sigma \quad (3.234)$$

式中, σ_i 为不与断裂纤维相邻的纤维承受的载荷。利用 (3.234) 式, 可以得到

$$\sigma_i = \sigma \left[\frac{1 - aKM_f/M}{1 - (a + 1)M_f/M} \right] \quad (3.235)$$

当 $M_f \ll M$ 时, 可以取 $\sigma_i \approx \sigma$ 。

当外载由 σ 增至 $\sigma + \Delta\sigma$ 时, 与断裂纤维相邻的纤维破坏概率的增量为 $\{F(K\sigma + K\Delta\sigma) - F(K\sigma)\} / [1 - F(\sigma)]$, 而不与其相邻的纤维断裂概率增量为 $\{F(K\sigma + \Delta\sigma) - F(\sigma)\} / [1 - F(\sigma)]$, 因此, 由于载荷增加 $\Delta\sigma$, 断裂纤维数目平均增量可以表示成

$$\begin{aligned} dM_f = & M_a[F(K\sigma + K\Delta\sigma) - F(K\sigma)] \\ & + M_i[F(\sigma + \Delta\sigma) - F(\sigma)] \end{aligned} \quad (3.236)$$

在导出式(2.236)时,由于 $F(\sigma) \ll 1$, 我们取 $1 - F(\sigma) \approx 1$ 。因此得到方程

$$\frac{dM_f}{d\sigma} + \left[(a+1) \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} - a \frac{dF(K\sigma)}{d\sigma} \right] M_f = M \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} \quad (3.237)$$

其初始条件为

$$M_f(0) = 0 \quad (3.238)$$

方程(2.237)式的解为

$$M_f = M \exp \left[(a+1) \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma}{\sigma_\delta} \right)^\beta \right\} - a \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma}{\sigma_\delta} \right)^\beta \right\} \right] T \quad (3.239)$$

式中

$$T = \int_0^\sigma \beta \left(\frac{\sigma}{\sigma_\delta} \right)^{\beta-1} \exp \left[- (a+1) \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma}{\sigma_\delta} \right)^\beta \right\} + a \exp \left\{ - \left(\frac{K\sigma}{\sigma_\delta} \right)^\beta \right\} \right] \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma}{\sigma_\delta} \right)^\beta \right\} d\sigma \quad (3.240)$$

纤维束所能承担的载荷均值为

$$\langle \sigma_B \rangle = (1 - M_f/M) \sigma_m \quad (3.241)$$

式中, σ_m 由下式确定

$$\frac{d}{d\sigma} \left[\left(1 - \frac{M_f}{M} \right) \sigma_m \right] \Big|_{\sigma=\sigma_m} = 0 \quad (3.242)$$

当 M 较大时,纤维束强度服从正态分布,概率密度函数为

$$g(\sigma_B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\psi_B} \exp \left[- \frac{(\sigma_B - \langle \sigma_B \rangle)^2}{2\psi_B^2} \right] \quad (3.243)$$

式中,均方差 ψ_B 为

$$\psi_B = \sigma_m \left\{ F(\sigma_m) [1 - F(\sigma_m)] \right\}^{1/2} M^{-1/2} \quad (3.244)$$

由最弱环理论(3.178),可以导出 N 个纤维束组成的复合材料强度的概率密度函数

$$\lambda(\sigma_{fc}) = N g(\sigma_{fc}) [1 - G(\sigma_{fc})]^{N-1} \quad (3.245)$$

因此,复合材料的强度均值可由下式确定

$$\frac{d\lambda(\sigma_{fc})}{d\sigma_{fc}} = 0 \quad (3.246)$$

最后,再利用混合律即可求得复合材料强度值

$$\sigma_c = \sigma_{fc} C_f + (1 - C_f) \sigma_m^1 \quad (3.247)$$

式中, σ_m^1 为复合材料破坏时基体承担的载荷, C_f 为纤维体积含量。

(3.24) 计算值同 Rosen 实验值比较结果如图 3.33 所示。

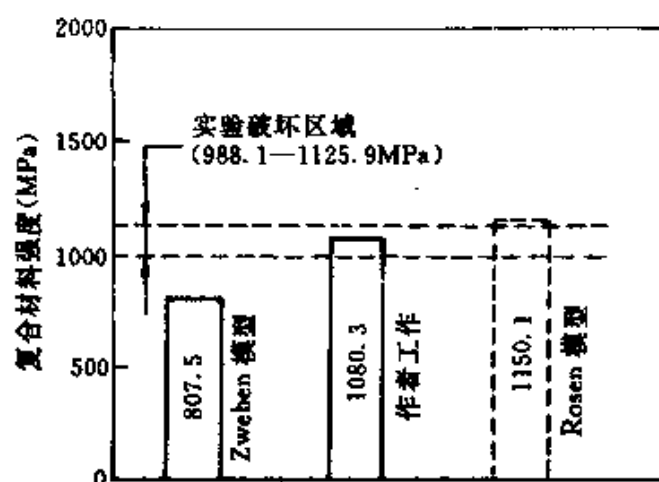


图 3.33 理论预报强度值同实验值比较^[47]

参 考 文 献

- [1] J. M. Hedgepeth, Stress concentrations in filamentary structures, *NASA TN D-882*, 1961.
- [2] J. M. Hedgepeth and P. Van Dyke, Local stress concentrations in imperfect filamentary composite materials, *J. Composite Mater.*, 1967, 1: 294.
- [3] P. Van Dyke and J. M. Hedgepeth, Stress concentrations from single-filament failures in composite materials, *Textile Research Journal*, 1969; 618.
- [4] B. W. Fichter, Stress concentration around broken filaments in a filament-stiffened sheet, *NASA TN D-5453*, 1969.
- [5] B. W. Fichter, Stress concentrations in filament stiffened sheets of finite length, *NASA TN D-5947*, 1970.
- [6] C. Zweiben, An approximate method of analysis for notched unidirectional composites, *Engineering Fracture Mechanics*, 1974, 6(1).
- [7] J. G. Goree and R. S. Gross, Stress in a three-dimensional unidirectional composite containing broken fibers, *Engineering Fracture Mechanics*, 1980, 13: 395.
- [8] F. Hikami and T. W. Chou, A probabilistic theory for the strength of discontinuous fiber composites, *J. Mater. Sci.*, 1984, 19: 1805.
- [9] T. W. Chou, Microstructural design of fiber composites, Cambridge University

Press, 1992.

- [10] H. Fukuda and K. Kawata, On the stress concentration factor in fibrous composites, *Fiber Sci. Tech.*, 1976, **9**, 189.
- [11] H. Fukuda and K. Kawata, Stress distribution of laminates including discontinuous layers, *Fiber Sci. Tech.*, 1980, **13**, 255.
- [12] 范赋群、曾庆敦, 单向纤维增强复合材料的随机扩大临界核理论, 中国科学, A 辑, 1994, **24**(2).
- [13] Wang Biao, Dai Jin, Du Shan Yi, A statistical model for crack growth in composite materials, *Proceedings of ICCM-11*, Gold Coast, 1997.
- [14] 切列帕诺夫著, 黄克智等译, 脆性断裂力学, 科学出版社, 1990.
- [15] B. D. Coleman, On the strength of classical fibers and fiber bundles, *J. Mech. Phys. Solids*, 1958, **7**, 60.
- [16] H. E. Daniels, The statistical theory of the strength of bundles of threads I", *Proc. Roy. Soc. London*, 1945, **A183**, 405.
- [17] A. Kelly, *Strong Solids*, Clarendon press, Oxford, 1973.
- [18] B. Epstein, Statistical aspects of fracture problems, *J. App. Phys.*, 1948, **19**, 140.
- [19] S. L. Phoenix and H. M. Taylor, The asymptotic strength distribution of a general fiber bundle, *Adv. Appl. Prob.*, 1973, **5**, 200.
- [20] S. L. Phoenix, Probabilistic strength analysis of fiber bundle structures, *Fiber Sci. Tech.*, 1974, **7**, 15.
- [21] R. L. Smith and S. L. Phoenix, Asymptotic distributions for the failure of fibrous materials under series-parallel structure and equal load sharing, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1981, **48**, 75.
- [22] L. N. McCartney and R. L. Smith, Statistical theory of the strength of fiber bundles, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1983, **50**, 601.
- [23] R. L. Smith, A probabilistic model for fibrous composites with local load-sharing, *Proc. Roy. Soc. London*, 1980, **A372**, 539.
- [24] D. G. Harlow, The pure flaw model for chopped fiber composites, *Proc. Roy. Soc. London*, 1985, **A397**, 211.
- [25] N. J. Parratt, Defects in glass fibers and their effects on the strength of plastic mouldings, *Rubber and Plastics Age*, 1960.
- [26] B. W. Rosen, Tensile failure of fibrous composites, *AIAA Journal*, 1964, **2**, 1985.
- [27] D. E. Gucer and J. Gurland, Comparison of the statistics of two fracture Modes, *J. Mech. Phys. Solids*, 1962, **10**, 365.
- [28] D. G. Harlow and S. L. Phoenix, The chain-of-bundles probability model for the strength of fibrous materials I: Analysis and conjectures, *J. Composite Materials*, 1978, **12**, 195.

- [29] D. G. Harlow and S. L. Phoenix, The chain-of-bundle probability model for the strength of fibrous materials I: A numerical study of convergence, *J. Composite Materials*, 1978, **12**: 314.
- [30] P. M. Scop and A. S. Argon, Statistical theory of strength of laminated composites, *J. Composite Materials*, 1967, **1**: 92.
- [31] P. M. Scop and A. S. Argon, Statistical theory of strength of laminated composites, I, *J. Composite Materials*, 1969, **3**: 30.
- [32] C. Zweben, Tensile failure of fiber composites, *AIAA Journal*, 1968, **6**: 2325.
- [33] C. Zweben and B. W. Rosen, A statistical theory of material strength with application to composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 1970, **18**: 189.
- [34] H. Fukuda and K. Kawata, Strength estimation of unidirectional composites, *Trans. Japan Soc. Composite Materials*, **2**: 59.
- [35] D. G. Harlow, Properties of the strength distribution for composite materials, *ASTM STP674*, 1979, 484.
- [36] S. L. Phoenix, Statistical aspects of failure of fibrous composites, *ASTM STP674*, 1979, 455.
- [37] D. G. Harlow and S. L. Phoenix, Bounds on the probability of failure of composite materials, *Int. J. Fracture*, 1979, **15**: 321.
- [38] D. G. Harlow and S. L. Phoenix, Probability distributions for the strength of composite materials I: Two level bounds, *Int. J. Fracture*, 1981, **17**: 347.
- [39] D. G. Harlow and S. L. Phoenix, probability distribution of the strength of composite materials I: A Convergent sequence of tight bounds, *Int. J. Fracture*, 1981, **17**: 601.
- [40] R. L. Smith, A probability model for fibrous composites with local load-sharing, *Proc. Roy. Soc. London*, 1980, **A372**: 539.
- [41] R. L. Smith, A note on a probability model for fibrous composites, *Proc. Roy. Soc. London*, 1982, **A382**: 179.
- [42] R. L. Smith and S. L. Phoenix, A Comparison of probabilistic techniques for the strength of fibrous materials under local load-sharing among fibers, *Int. J. Solids Structures*, 1983, **19**: 479.
- [43] R. L. Smith, S. L. Phoenix, M. R. Greenfield, R. B. Henstenbury and R. E. Pitt, Lower-tail approximations for the probability of failure of three-dimensional fibrous composites with hexagonal geometry, *Proc. Roy. Soc. London*, 1983, **A388**: 353.
- [44] S. L. Phoenix, P. Schwartz and H. H. Robinson, Statistics for the strength and lifetime in creep-rupture of model carbon/epoxy composites, *Composite Science and Technology*, 1988, **32**: 81.
- [45] 王彪、王殿富, 一个单向增强复合材料强度的概率模型, 复合材料学报, 1986, **2**.
- [46] Y. T. Zhu, B. L. Zhou, G. H. He and Z. G. Zheng, A statistical theory of compos-

- ite materials strength, *J. Comp. Mat.* , 1989, **23**.
- [47] Y. T. Zhu and G. Zong, On the application of the statistical strength model of fiber-reinforced composites, *J. Comp. Mat.* , 1993, **27**.

第四章 短纤维复合材料细观强度理论

目前复合材料正在发展之中,其中短纤维复合材料的发展更是突飞猛进。因为它比连续纤维复合材料的模压性能好,便于自动化生产,从而降低成本,使它在民用工业中,甚至在人们的日常生活中的应用有了可能。

短纤维复合材料的弹性模量、热传导及热膨胀系数等材料常数可以利用基于 Eshelby 夹杂问题的解的细观力学方法进行预报。然而,如何建立复合材料的强度同纤维的含量,长径比,方位及纤维性能等细观结构之间的关系,并进而正确预报短纤维复合材料的强度是人们一直追求,但到目前为止仍没有圆满解决的问题。正确预报短纤维复合材料强度所面临的首要问题是必须求得沿纤维方向应力的分布,而后再利用混合律得到预报复合材料强度的公式。考虑到复合材料细观结构的随机性因素,比较可行的方法可能是建立正确的统计细观力学模型,并进而结合材料的损伤演化过程,预报短纤维复合材料的强度。本章的 § 4.1 将系统介绍求得沿纤维应力分布的方法及结果。在 § 4.2 和 § 4.3 中针对单向及随机方位的短纤维复合材料建立预报其强度性能的公式。最后,将介绍一些预报短纤维复合材料强度性能的统计模型。

§ 4.1 短纤维承载分析

短纤维复合材料由于纤维的不连续性以及尺寸、方位等随机性影响,应力分布十分复杂。这也决定了通常短纤维复合材料具有比连续纤维复合材料低得多的强度性能。

最早, Cox^[1] 利用剪滞法原理针对无限大基体中含有稀疏短纤维情况对应力场的分布进行了计算。后来 Fukuda 及 Kawa-

ta^[2], Burgel, Perry 及 Schneider^[5], Fukuda 及 Chou^[3,4], Chon 及 Sun^[6], Piggott^[7]等都对短纤维复合材料中纤维的承载问题进行了研究。

§ 4.1.1 弹性应力传递

首先研究单向短纤维复合材料中沿纤维应力分布问题。从复合材料中取出一半径为 R 的长复合材料圆柱体(图 4.1), 其中沿中心轴含有一根半径为 r_0 , 长为 l 的纤维。设纤维的轴向拉应力为 σ_f , 则根据剪滞法假设, 可以得到平衡方程为

$$(\pi r_0^2) \sigma_f - (2\pi r_0 dx) \tau_c = (\pi r_0^2) (\sigma_f + d\sigma_f) \quad (4.1)$$

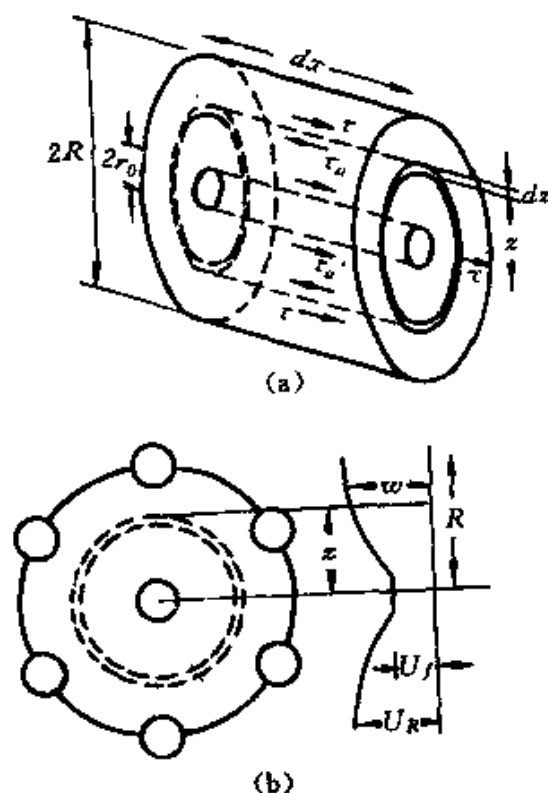


图 4.1 复合材料单元示意图

或者写成

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = - \frac{2\tau_c}{r_0} \quad (4.1)'$$

式中, τ_c 为沿纤维界面的剪应力。如果进一步假设, 基体及纤维在外力作用下均发生弹性变形, 界面并未屈服或滑移。在 $r = R$ 处基体沿 x 向的应变等于复合材料的外加应变, 并令 $w(x, r)$ 为沿 x 向在半径为 r 处基体的位移, $\tau(x, r)$ 为相应地点沿 x 向的剪应力。尽管由于对称性 $w(x, r)$ 及 $\tau(x, r)$ 不随相对于纤维中心轴的环向角度变化, 但它们却是半径 r 的函数, 这一点同连续纤维的剪滞法模型不同。作为平衡条件, 纤维界面的剪力应等于任一环向层 $r = r$ 处的剪力, 即

$$2\pi r_0 \tau_c = 2\pi r \tau \quad (4.2)$$

根据虎克定律, 可以得到

$$\tau = G_m \frac{dw(x, r)}{dr} \quad (4.3)$$

式中, $\frac{dw(x, r)}{dr}$ 为基体中沿 x 轴剪切应变, G_m 为基体剪切模量。将(4.3)式代入(4.2)式中, 可以得到

$$\frac{dw(x, r)}{dr} = \frac{\tau_c r_0}{G_m r} \quad (4.4)$$

对方程(4.4)式求积,

$$\int_{u_f}^{u_R} dw = \frac{\tau_c r_0}{G_m} \int_{r_0}^R \frac{dr}{r} \quad (4.5)$$

可以得到

$$\tau_c = \frac{G_m(u_R - u_f)}{r_0 \ln(R/r_0)} \quad (4.6)$$

式中, u_R 及 u_f 分别为基体及纤维的轴向位移。

R/r_0 值与纤维在基体中排布的细观结构有关, 它们的选择将确保满足纤维体积含量一定的目标。如果纤维的排布呈四方形结构(图 4.2), 则 $ABCD$ 包围的面积等于 R^2 , 其中包含了一纤维的横截面积, 这时, 纤维的体积含量可以认为等于纤维的面积含量, 即 $v_f = \pi r_0^2 / R^2$, 因此

$$\ln(R/r_0) = \frac{1}{2} \ln(\pi/v_f) \quad (4.7)$$

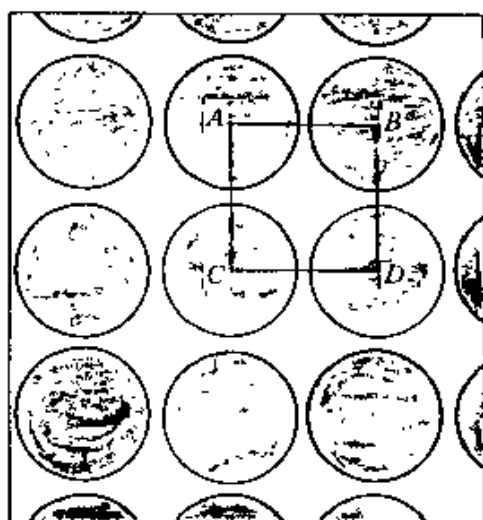


图 4.2 呈正方形排布的纤维复合材料

以同样的方法,如果纤维的排布呈六角形,可以得到

$$\ln(R/r_0) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3} v_f}\right) \quad (4.8)$$

实际上,只要保证纤维的体积含量一定,计算得到的 $\ln(R/r_0)$ 值变化不大。如取体积含量 $v_f = 0.5$, (4.7) 式计算结果为 0.919, 而 (4.8) 式计算结果为 0.991。作为一般情况,我们可以写出如下关系式:

$$\ln(R/r_0) = \frac{1}{2} \ln(P_f/v_f) \quad (4.9)$$

式中, P_f 是与纤维排布方式相关的几何因子。

将 (4.9) 式代入 (4.6) 式中, 并一同代入 (4.1)' 式中, 可以得到

$$\frac{d\sigma_f}{dx} = - \frac{2G_m(u_R - u_f)}{r_0^2 \ln(P_f/v_f)} \quad (4.10)$$

利用虎克定律, 可以建立如下关系:

$$\sigma_f = E_f \frac{du_f}{dx} \quad (4.11)$$

并且, $\frac{du_R}{dx} = \epsilon_0$, ϵ_0 为复合材料外加应变。对 (4.10) 式两边取关于 x

的微分,并代入 $\frac{du_f}{dx}$ 及 $\frac{du_R}{dx}$ 的值,可以得到如下方程:

$$\frac{d^2\sigma_f}{dx^2} = \frac{2G_m}{r^2 \ln(P_f/v_f)} (\epsilon_0 - \sigma_f/E_f) \quad (4.12)$$

引入如下无量纲量,

$$n^2 = \frac{2G_m}{\ln(P_f/v_f)E_f} \quad (4.13)$$

(4.12)式成为

$$\frac{d^2\sigma_f}{dx^2} = \frac{n^2}{r^2} (\sigma_f - E_f\epsilon_0) \quad (4.14)$$

方程(4.14)式的解为

$$\sigma_f = E_f\epsilon_0 + B\sinh(nx/r) + D\cosh(nx/r) \quad (4.15)$$

式中, B, D 为积分常数, 可以利用边界条件确定。如果假定纤维端点不承担载荷, 则当 $x = L$, 及 $x = -L$ 时, $\sigma_f = 0$, 由此可以得到

$$B = 0, D = -E_f\epsilon_0/\cosh(ns) \quad (4.16)$$

式中, $s = L/r_0$ 为纤维的长径比。

这时, 纤维中应力分布由(4.15)式决定,

$$\sigma_f = E_f\epsilon_0 \{1 - \cosh(nx/r)/\cosh(ns)\} \quad (4.17)$$

将(4.17)式代入(4.1)'式中, 可以求得界面剪应力沿纤维的分布为

$$\tau_e = \frac{1}{2} n E_f \epsilon_0 \sinh(nx/r) / \cosh(ns) \quad (4.18)$$

(4.17)式及(4.18)式的计算结果如图 4.3 所示。

利用(4.17)式及(4.18)式, 可以发现, 纤维中最大拉伸应力发生在纤维中心, 其值为

$$\sigma_{f\max} = E_f\epsilon_0 \{1 - \operatorname{sech}(ns)\} \quad (4.19)$$

而最大界面剪切应力发生在纤维两端。

为了进行强度计算, 通常需要首先计算纤维平均承担的应力, 其值为

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_f &= \frac{E_f\epsilon_0}{L} \int_0^L \{1 - \cosh(nx/r_0)/\cosh(ns)\} dx \\ &= E_f\epsilon_0 [1 - \tanh(ns)/ns] \end{aligned} \quad (4.20)$$

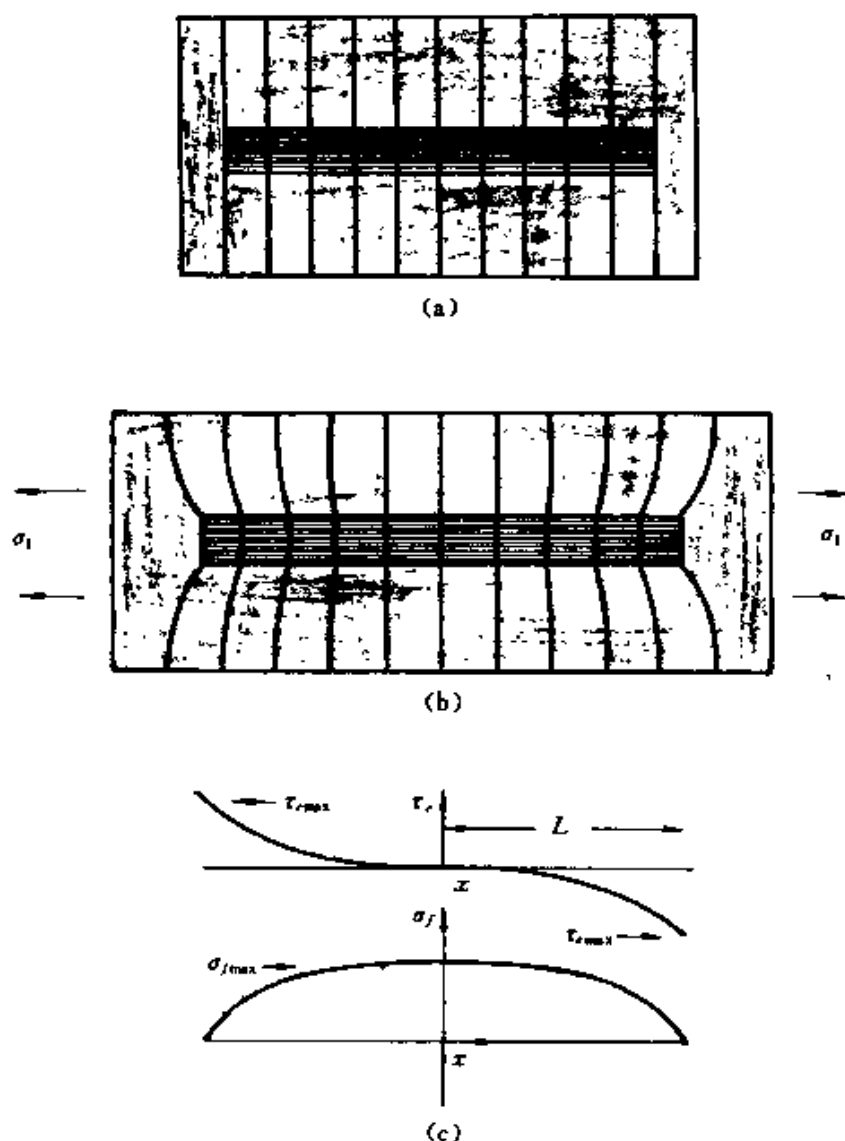


图 4.3 纤维轴向拉伸应力及界面剪应力分布

如果认为基体承受的平均载荷为 $\bar{\sigma}_m = E_m \epsilon_0$, 根据混合律, 我们可以得单向短纤维增强复合材料拉伸应力 - 应变关系为

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \bar{\sigma}_f v_f + \bar{\sigma}_m (1 - v_f) \\ &= \{v_f E_f [1 - \tanh(ns)/ns] + (1 - v_f) E_m\} \epsilon_0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

很明显, 上面所得到的结果忽略了纤维两端所承担的拉伸载荷以及基体所承担的拉伸载荷, 这对于长径比 $s > 10$ 的情况是完全合理的假设。

§ 4.1.2 单向短纤维增强金属基复合材料

短纤维增强复合材料在外载作用下,其纤维及基体界面往往会产生滑移。如果对于金属基复合材料,忽略金属基体的加工强化效果,并认为纤维与基体界面结合完好,则纤维两端的滑移段中的剪切应力应该等于基体的屈服应力 τ_{my} (图 4.4)。滑移区的长度为 mL , 发生在纤维的两端, m 是一个依赖于外加载荷的无量纲参量。在纤维的中间部分,应力的分布形式仍可由上述弹性变形的公式计算。

在未发生滑移的中心区域,应力场的分布仍可利用 (4.15) 式计算,其积分常数应由新的边界条件确定。当 $x = \pm L(1 - m)$ 时, $\sigma_f = \sigma_{fi}$, 式中 σ_{fi} 是滑移段产生的纤维中拉伸应力,将在下文中确定。

因此,可以得到纤维中间未滑移部分的应力分布为

$$\sigma_{fc} = E_f \epsilon_0 + (\sigma_{fi} - E_f \epsilon_0) \cosh(nx/r_0) / \cosh(n\bar{s}) \quad (4.22)$$

式中, $\bar{s}$ 是等效长径比,由下式确定

$$\bar{s} = s(1 - m) \quad (4.23)$$

对 (4.22) 式取微分可以得到

$$\frac{d\sigma_{fc}}{dx} = \frac{n}{r_0} (\sigma_{fi} - E_f \epsilon_0) \sinh(nx/r_0) / \cosh(n\bar{s}) \quad (4.24)$$

当 $x = L(1 - m)$ 时,应力导数 $\frac{d\sigma_{fc}}{dx} = -2\tau_{my}/r_0$, 因此可以得到确定 σ_{fi} 的方程,

$$\sigma_{fi} - E_f \epsilon_0 = -\frac{2\tau_{my}}{n} \text{cth}(n\bar{s}) \quad (4.25)$$

将 (4.25) 式代入 (4.22) 式中,可以得到

$$\sigma_{fc} = E_f \epsilon_0 - \frac{2\tau_{my}}{n} \cosh(nx/r_0) / \sinh(n\bar{s}) \quad (4.26)$$

在未滑移纤维中部平均应力为

$$\bar{\sigma}_{fc} = \frac{1}{L(1 - m)} \int_0^{L(1 - m)} \sigma_{fc} dx$$

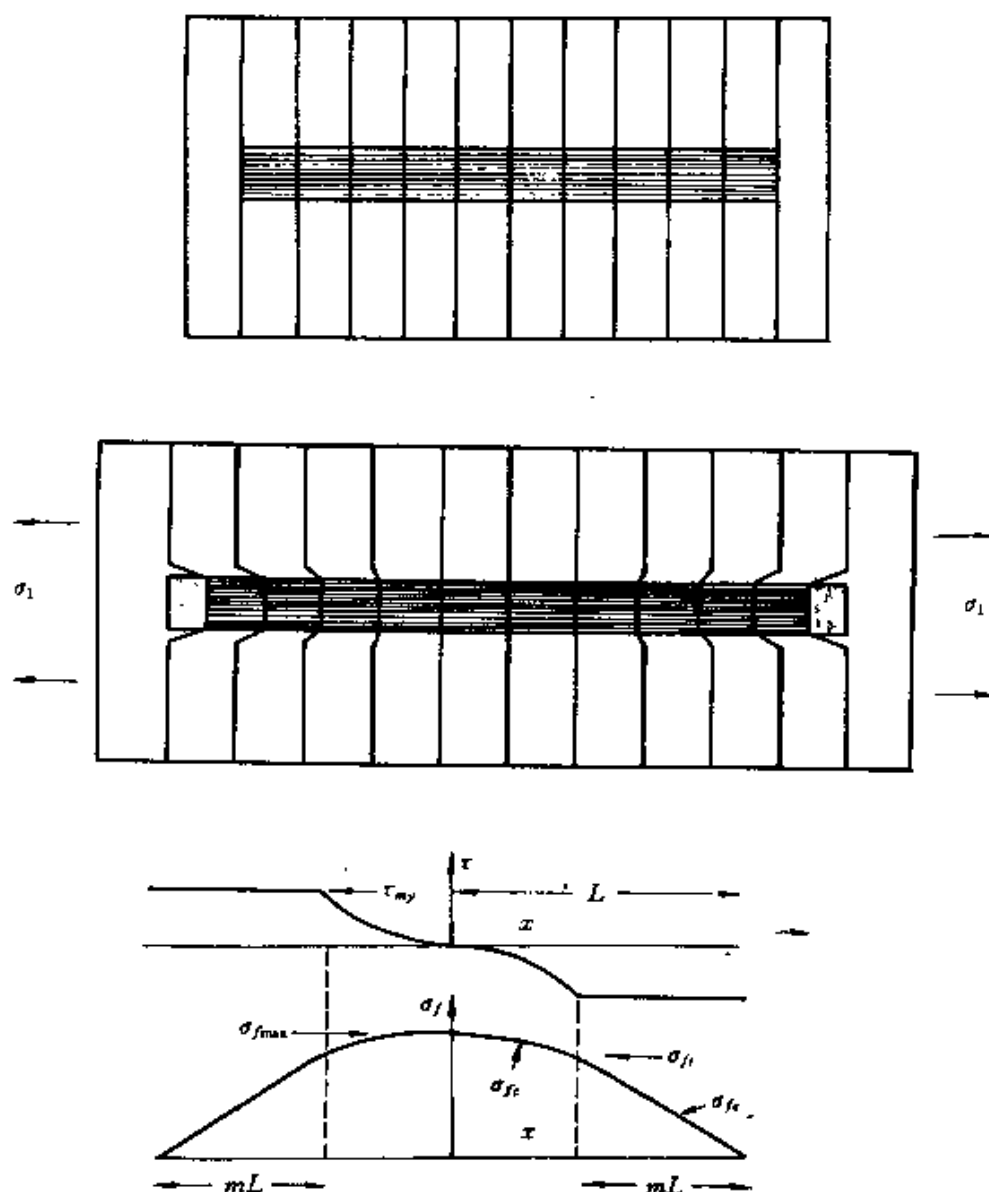


图 4.4 界面发生屈服后复合材料中纤维及界面承担的载荷

$$= E_f \epsilon_0 - \frac{2\tau_{my}}{n^2 s(1-m)} \quad (4.27)$$

同样, 拉伸应力最大值发生在纤维中点 $x=0$ 处, 利用(4.26)式可以得到最大应力

$$\sigma_{fmax} = E_f \epsilon_0 - \frac{2\tau_{my}}{n} \text{csch}(ns) \quad (4.28)$$

在滑移区段, 界面剪切应力等于常量 $\tau_i = \tau_{my}$, 因此, 利用方程

(4.1)' 式, 可以求得该段内沿纤维的轴向拉伸应力为

$$\sigma_{fe} = \frac{2\tau_{my}}{r_0}(L - x) \quad (4.29)$$

因此, 在滑移区段, 纤维中的平均应力为

$$\bar{\sigma}_{fe} = \frac{1}{mL} \int_{L(1-m)}^L \sigma_{fe} dx = m s \tau_{my} \quad (4.30)$$

这样, 沿整个纤维的平均应力可采用如下公式计算

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_f &= (1 - m) \bar{\sigma}_{fe} + m \bar{\sigma}_{fe} \\ &= E_f \epsilon_0 (1 - m) - \frac{2\tau_{my}}{n^2 s} + m^2 s \tau_{my} \end{aligned} \quad (4.31)$$

在 $x = L(1 - m)$ 处, $\sigma_{fe} = \sigma_{fi}$, 再利用(4.25)式, 可以求得滑移段的相对长度值 m

$$m = \frac{E_f \epsilon_0}{2s\tau_{my}} - \frac{\text{cth}(ns)}{ns} \quad (4.32)$$

通常情况, 需利用数值方法求解方程(4.32)式以求得 m 值。然而, 对于一般的短纤维增强复合材料, $\text{cth}(ns) \approx 1.00$, 代入(4.32)式中得到

$$m \approx \frac{E_f \epsilon_0}{2s\tau_{my}} - \frac{1}{ns} \quad (4.33)$$

将(4.33)式代入(4.31)式中, 得到纤维承担的平均应力

$$\bar{\sigma}_f \approx E_f \epsilon_0 - \frac{\tau_{my}}{n^2 s} - \frac{E_f^2 \epsilon_0^2}{4\tau_{my} s} \quad (4.34)$$

利用混合律, 可以得到复合材料的宏观应力

$$\sigma_0 = (v_f E_f + v_m E_m) \epsilon_0 - \frac{v_f}{s} \left(\frac{\tau_{my}}{n^2} + \frac{E_f^2 \epsilon_0^2}{4\tau_{my}} \right) \quad (4.35)$$

(4.35)式即为复合材料的拉伸应力-应变关系。

图 4.5 绘出不同长径比短纤维增强复合材料的应力-应变关系, 可以看出当长径比 $s \rightarrow \infty$ 时, 混合律是严格成立的。

§ 4.1.3 短纤维增强树脂基复合材料

对于短纤维增强树脂基复合材料来说, 当纤维与基体界面的剪切载荷达到某一临界值 $a\tau_{my}$ 之后, 界面将产生摩擦滑移, 而这时

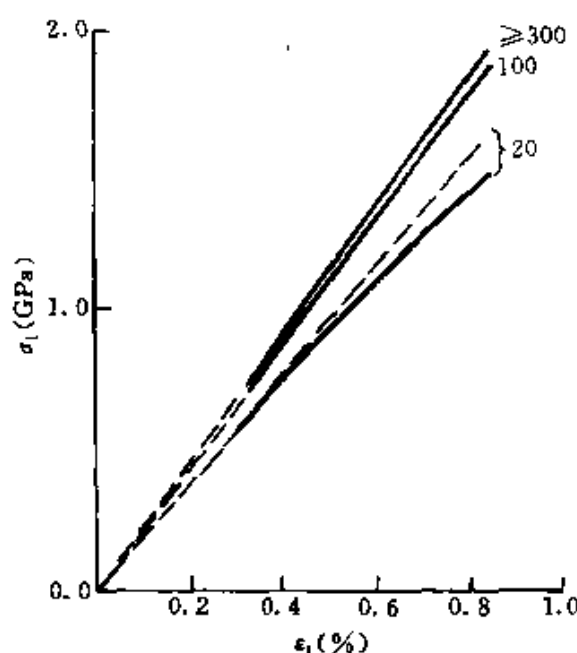


图 4.5 短纤维增强复合材料应力 - 应变曲线^[7]

的摩擦滑移阻力往往小于临界载荷 $a\tau_{my}$, 这里 $0 \leq a \leq 1$ 是一个无量纲参数。因此, 这种情况下, 沿纤维方向的应力分布将与前面讨论的结果不尽相同, 应力 - 应变关系也具有一些特殊的性质。

由(4.18)式可以确定最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}nE_f\epsilon_0 \tanh(ns)$$

令出现滑移时, 外加临界应变为 ϵ_{0c} , 则根据滑移条件 $\tau_{\max} = a\tau_{my}$, 可以确定滑移临界应变,

$$\epsilon_{0c} = 2a\tau_{my} \operatorname{cth}(ns) / nE_f \quad (4.36)$$

同样也可以确定相应的外加临界应力为

$$\sigma_{0c} = \frac{2a\tau_{my}}{nE_f} \left\{ (v_f E_f + v_m E_m) \operatorname{cth}(ns) - \frac{v_f E_f}{ns} \right\} \quad (4.37)$$

在界面临界点 $x = L(1 - m)$, 我们知道

$$\frac{d\sigma_{fc}}{dx} = - \frac{2a\tau_{my}}{r_0} \quad (4.38)$$

在此点(4.25)式成为

$$\sigma_{fi} - E_f \epsilon_0 = - \frac{2a\tau_{my}}{n} \text{cth}(ns) \quad (4.39)$$

同样,未滑移的纤维中心段的平均拉应力为

$$\bar{\sigma}_{fc} = E_f \epsilon_0 - \frac{2a\tau_{my}}{n^2 s(1-m)} \quad (4.40)$$

界面剪切应力一旦达到临界值后,该点的滑移阻力将下降,并由界面的摩擦滑移阻力控制。界面的摩擦阻力等于摩擦系数 μ 乘上纤维及基体界面法向压应力 σ_n 。对于纤维增强树脂复合材料,法向压应力 σ_n 由二部分组成:

(1) 在加工过程中产生的残余应力 σ_r , 可以认为 σ_r 是一个常量;

(2) 在沿纤维方向拉应力的作用下,由于基体的横向收缩变形面产生的压应力。

法向压应力的表达式为

$$\sigma_n = \sigma_r - \gamma_1 E_m \epsilon_0 \quad (4.41)$$

在得到(4.41)式时,我们忽略了纤维的横向收缩变形。界面滑移摩擦阻力只有当 $\sigma_n < 0$ 时才存在,其值为 $-\mu\sigma_n$ 。

我们只需要将(4.29)式中的 τ_{my} 用 $-\mu\sigma_n$ 替换,即可求得滑移段纤维中拉伸应力的分布,

$$\sigma_{fe} = \frac{2\mu}{r_0} (\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r) (L - x) \quad (4.42)$$

同样,我们可以计算得到沿此段应力均值为

$$\bar{\sigma}_{fe} = \mu ms (\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r) \quad (4.43)$$

沿整个纤维段的平均应力为

$$\bar{\sigma}_f = E_f \epsilon_0 (1 - m) - \frac{2a\tau_{my}}{n^2 s} + \mu m^2 s (\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r) \quad (4.44)$$

在 $x = (1 - m)L$ 处,剪应力产生的纤维内拉应力由(4.29)式计算得到

$$\sigma_{fi} = 2\mu ms (\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r) \quad (4.45)$$

同样,利用(4.39)式,可以得到计算 m 值的方程如下:

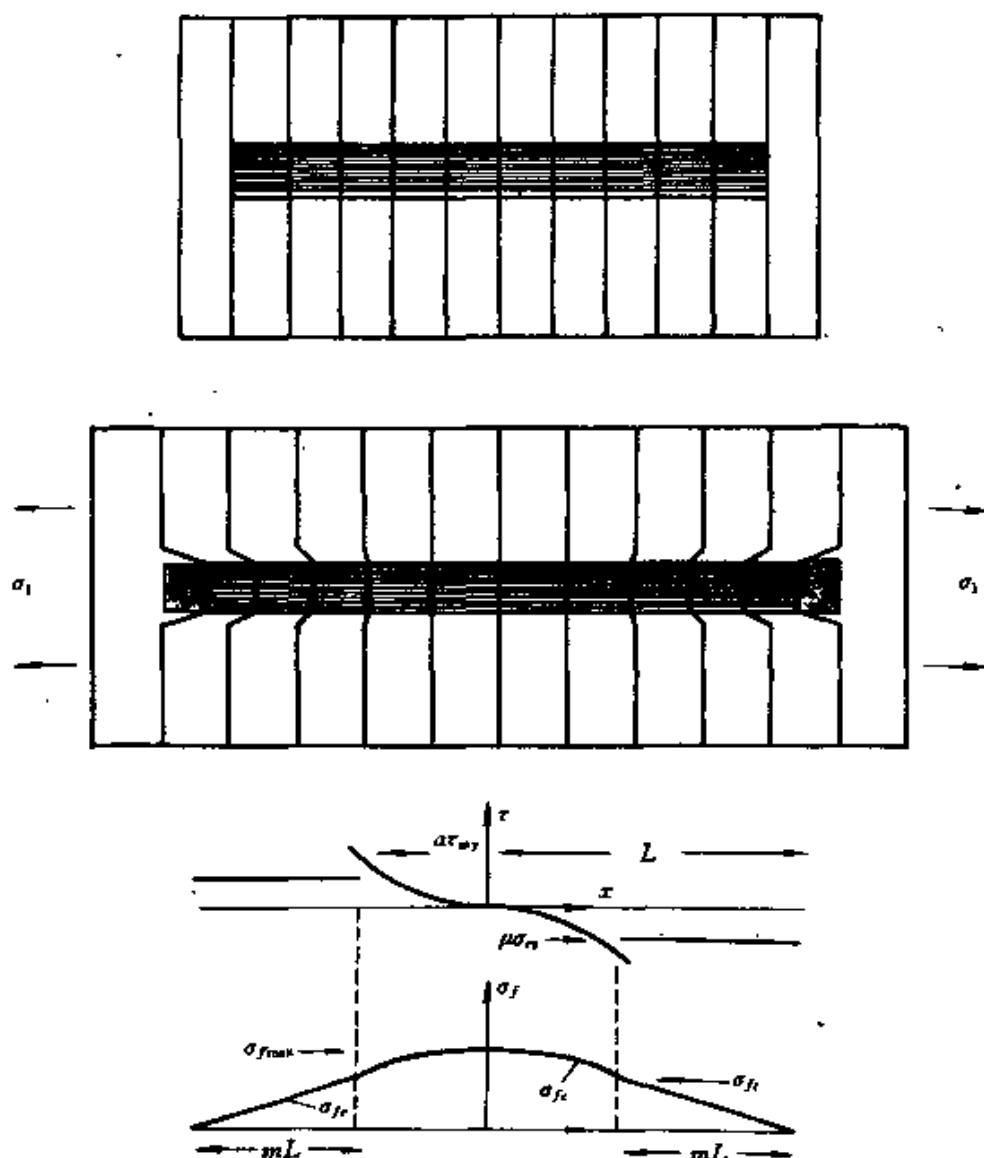


图 4.6 界面可以滑移的复合材料中纤维及界面拉伸及剪切应力分布

$$m = \frac{E_f \epsilon_0 - 2a\tau_{my} \text{cth}(ns)/n}{2\mu s (\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r)} \quad (4.46)$$

利用如下方程引入临界长径比 s_c

$$s_c = -\sigma_{fn}/2\mu\sigma_r \quad (4.47)$$

式中, σ_{fn} 为纤维的极限拉伸强度。当纤维长度足够长以致于 $s \geq 2s_c$ 时, $\text{cth}(ns) \approx 1.00$, 代入(4.46)式中,可以得到

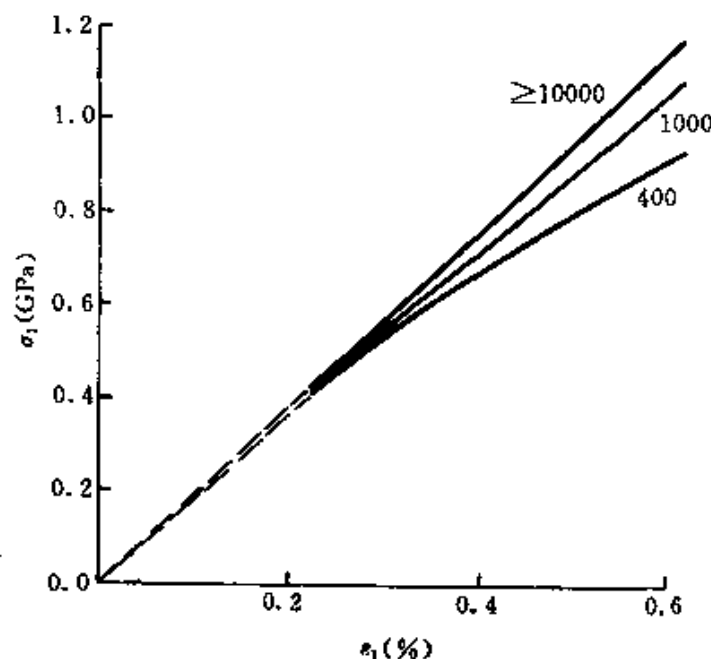


图 4.7 碳/环氧复合材料计算应力-应变曲线^[7]

$$m \approx \frac{E_f \epsilon_0 - 2a\tau_{my}/n}{2\mu s(\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r)} \quad (4.48)$$

利用混合律可以得到复合材料宏观拉伸应力为

$$\sigma_0 = \{v_f E_f + v_m E_m\} \epsilon_0 - \frac{v_f}{s} \left\{ \frac{(E_f \epsilon_0)^2 - (2a\tau_{my}/n)^2}{4\mu(\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r)} + \frac{2a\tau_{my}}{n^2} \right\} \quad (4.49)$$

图 4.6 绘出了沿纤维方向拉伸应力及剪应力分布示意图。值得注意的是,在界面滑移临界点 $x = (1-m)L$,剪切应力是不连续的,这主要由于界面剪切应力一旦达到其临界值,界面滑移阻力将随之下落。图 4.7 中绘出了碳/环氧的拉伸应力-应变曲线,从图中可以发现,当长径比较小时,应力-应变曲线出现明显的非线性。图中虚线表示弹性变形区域。

§ 4.1.4 短纤维增强陶瓷、水泥等材料

对于纤维增强水泥等类似的材料,由于基体的破坏拉伸应变很小,基体横向收缩变形产生的界面压应力可忽略不计,因此,上一部分得到的结论可以略加修改后使用,如应力-应变关系为

$$\sigma_0 = \{v_f E_f + v_m E_m\} \epsilon_0 - \frac{v_f}{s} \left\{ \frac{(E_f \epsilon_0)^2 - (2a\tau_{ms}/n)^2}{-4\mu\sigma_r} + \frac{2a\tau_{ms}}{n^2} \right\} \quad (4.50)$$

对于纤维增强复合材料来说,一般要求界面残余压应力 σ_r 比较小,而纤维的横向收缩变形同基体的收缩变形相当,不能忽略,其界面压应力可以表示成

$$\sigma_n = \sigma_r - E_m(\gamma_1 \epsilon_0 - \gamma_2 \sigma_{fe}/E_f) \quad (4.51)$$

式中, γ_1, γ_2 分别为基体及纤维的泊松系数。

当 $\sigma_n < 0$ 时,可以通过积分求得滑移段纤维中的应力分布

$$\sigma_{fe} = E_f(\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r) \{1 - \exp[-2\mu\gamma_2 E_m(L-x)/E_f \sigma_0]\} / E_m \gamma_2 \quad (4.52)$$

由于滑移段界面剪应力同 $d\sigma_{fe}/dx$ 成比例,因此,它不是常量,这点同前述结果不同,图 4.8 绘出了沿纤维的拉伸应力及界面剪切应力的分布。

令

$$p = 2\mu\gamma_2 m s E_m / E_f$$

则沿滑移段平均应力为

$$\bar{\sigma}_{fe} = E_f(\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r) \{1 - (1 - e^{-p})/p\} / E_m \gamma_2 \quad (4.53)$$

在临界点 $x = L(1-m)$, 其拉伸应力为

$$\sigma_{fi} = E_f(\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r)(1 - e^{-p}) / E_m \gamma_2 \quad (4.54)$$

同样,也可以得到确定 m 值的方程

$$m = -\frac{E_f}{2\mu\gamma_2 s E_m} \ln \left\{ 1 - \frac{E_m \gamma_2 [n E_f \epsilon_0 - 2a\tau_{my} \text{cth}(ns)]}{n E_f (\gamma_1 E_m \epsilon_0 - \sigma_r)} \right\} \quad (4.55)$$

这种情况下,必须利用数值方法计算得到应力-应变关系。

上文所述的几类材料,主要区别在于它们的增强纤维与基体的界面条件不同。在实际应用中可以根据不同的界面条件而采用不同的公式。

§ 4.1.5 随机方位的短纤维增强复合材料

在以上所研究的材料模型上,其作用力与纤维方向平行,而许多短纤维增强复合材料其纤维的方位是随机分布的。这时,作用力

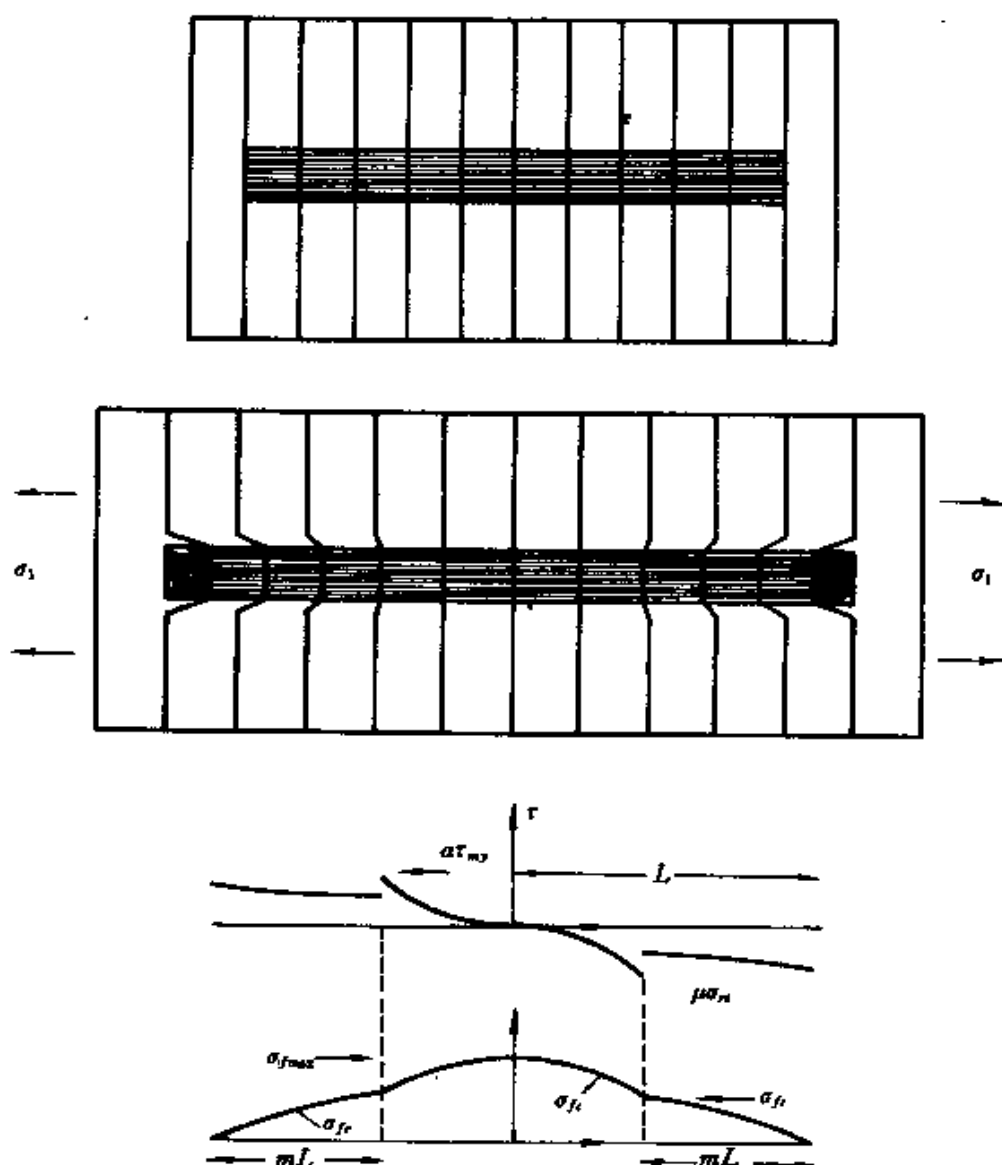


图 4.8 纤维增强陶瓷基复合材料纤维及界面拉伸及剪切应力分布

方向与纤维方向成一角度 α , 其材料模型如图 4.9 所示。模型有一个圆柱形纤维, 外面围有一层树脂基体, 其余的外围材料假设具有复合材料的平均性能, 这样, 类似于自洽方法模型, 考虑到了部分纤维之间的相互作用。该模型包含了如下假设:

- (1) 纤维及基体界面结合完好;
- (2) 在纤维方向上, 基体承担的正应力可忽略;
- (3) 纤维不会屈曲;
- (4) 纤维之间无相互作用。

根据上述假设,在纤维微分段 dz 上的应力分布如图 4.9 所示。其平衡方程可以写成

$$\int_0^{2\pi} \tau d\theta + \pi r_f \frac{d\sigma_f}{dz} = 0 \quad (4.56)$$

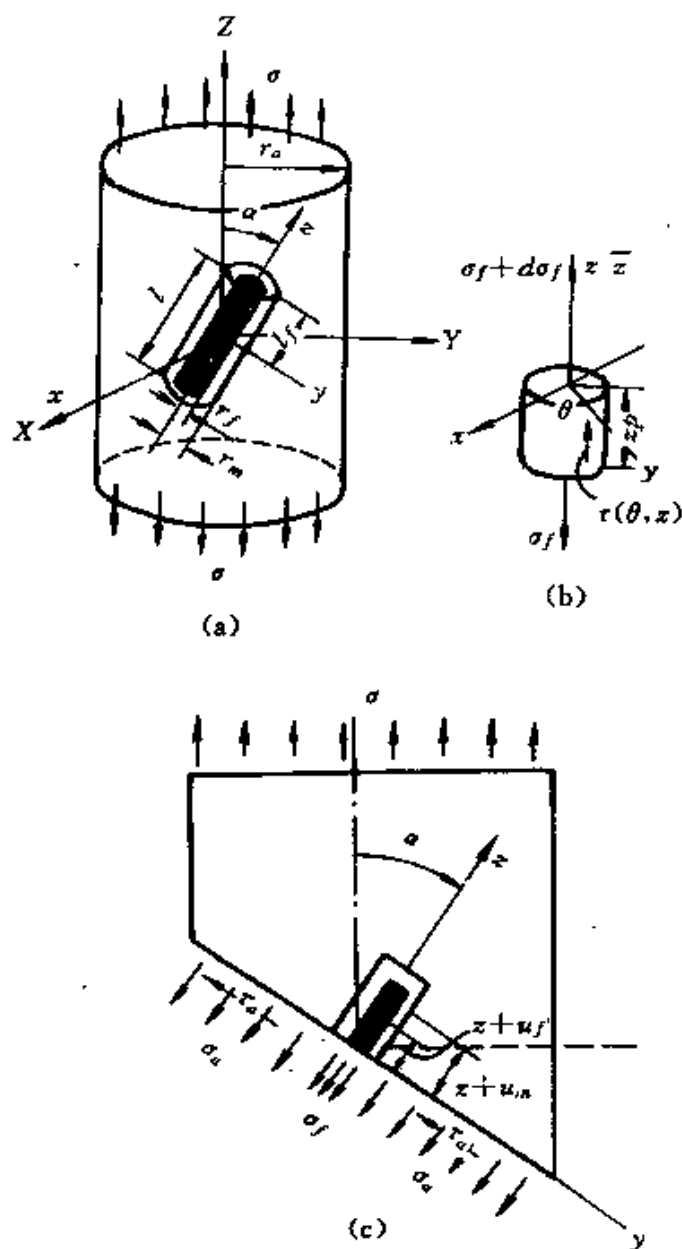


图 4.9 代表性体积单元

式中 σ_f 假定与 θ 及 r 无关。

而从总体 z 向平衡条件可以得到

$$r_f^2 \sigma_f + \left(\frac{r_a^2}{\cos \alpha} - r_f^2 \right) \sigma_a = \sigma r_a^2 \cos \alpha \quad (4.57)$$

式中各符号如图 4.9 所示。如果纤维及外围复合材料沿 z 向的位移分别为 u_f, u_a , 而基体中的剪切应变为 γ_m , 经过简化, 可以建立如下关系:

$$u_a - u_f = \gamma_m (r_m - r_f) \quad (4.58)$$

对式(4.58)关于 z 求导, 并利用虎克定律可以得到

$$\frac{\sigma_a}{E_a} - \frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{r_m - r_f}{G_m} \cdot \frac{d\tau}{dz} \quad (4.59)$$

式中, E_a 为复合材料的杨氏模量, 可以利用本书第二章介绍的有效介质方法求得, 当然也可以利用实验手段得到。由于 σ_a 及 σ_f 均与 θ 无关, 从(4.59)式可以看出 $d\tau/dz$ 也与 θ 无关。因此, 可以将(4.56)式写成

$$\frac{d\tau}{dz} + \frac{r_f}{2} \frac{d^2 \sigma_f}{dz^2} = 0 \quad (4.60)$$

结合式(4.57), (4.59)及(4.60)式, 消去 τ 及 σ_a , 最后推导出关于 σ_f 的微分方程,

$$\frac{d^2 \sigma_f}{dz^2} - \eta^2 \sigma_f = -\zeta^2 \quad (4.61)$$

式中

$$\eta^2 = \frac{2G_m}{(r_m - r_f)r_f} \left[\frac{r_f^2 \cos \alpha}{E_a(r_a^2 - r_f^2 \cos \alpha)} + \frac{1}{E_f} \right] \quad (4.62)$$

$$\zeta^2 = \frac{2\sigma G_m r_a^2 \cos^2 \alpha}{E_a r_f (r_m - r_f) (r_a^2 - r_f^2 \cos \alpha)} \quad (4.63)$$

如果考虑 $r_f \ll r_a$, (4.62)式及(4.63)式成为

$$\eta^2 = \frac{2G_m}{E_f(r_m - r_f)r_f} \quad (4.64)$$

$$\zeta^2 = \frac{2\sigma G_m \cos^2 \alpha}{E_a r_f (r_m - r_f)} \quad (4.65)$$

(4.61)式的解具有如下形式

$$\sigma_f = A \sinh \eta z + B \cosh \eta z + \frac{\zeta^2}{\eta^2} \quad (4.66)$$

依据纤维两端不承受拉伸载荷的条件 $\sigma_f(l_f) = \sigma_f(-l_f) = 0$, 可以得到积分常数, 并最终得到纤维中的应力分布

$$\sigma_f = \sigma \cos^2 \alpha \left(\frac{E_f}{E_a} \right) \left(1 - \frac{\cosh \eta z}{\cosh \eta l_f} \right) \quad (4.67)$$

为了确定剪应力, 将式(4.67)代入式(4.60)中, 并求解, 则可以得到

$$\tau = Q \sinh \eta z + c \quad (4.68)$$

式中

$$Q = \frac{G_m \xi^2}{\eta^3 (r_m - r_f) \cosh \eta l_f} \left[\frac{r_f^2 \cos \alpha}{E_a (r_a^2 - r_f^2 \cos \alpha)} + \frac{1}{E_f} \right] \quad (4.69)$$

为了求得常数 c , 根据在一般剪滞法分析时采用 $z = 0$ 时, $\tau = 0$ 的条件, 由于纤维与载荷方向不相一致, 必须经过复杂的坐标变换, 可以求得

$$c = -\sigma \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \quad (4.70)$$

代入式(4.68)中, 可以得到剪应力的分布。计算结果如图 4.10—图 4.15 所示。计算中采用的纤维体积含量、长径比及纤维

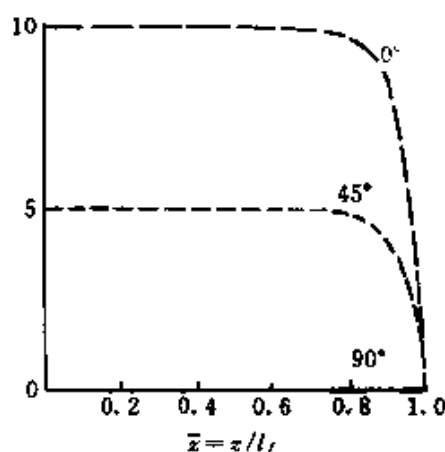


图 4.10 σ_f/σ 与 z/l_f 的关系曲线^[6]

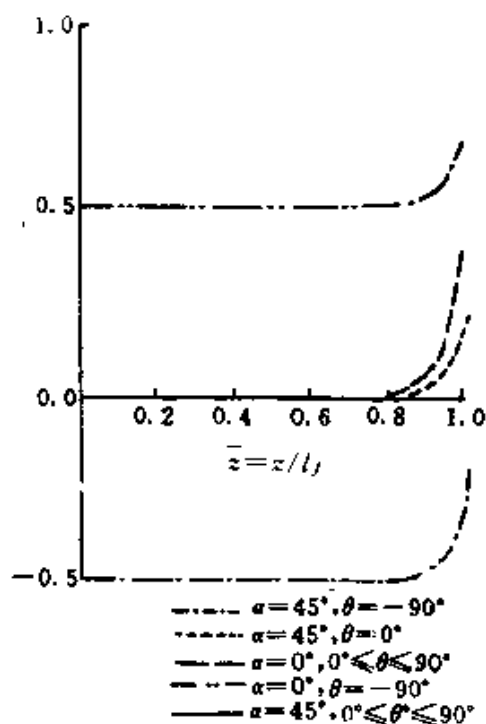


图 4.11 τ/σ 与 z/l_f 的关系曲线^[6]

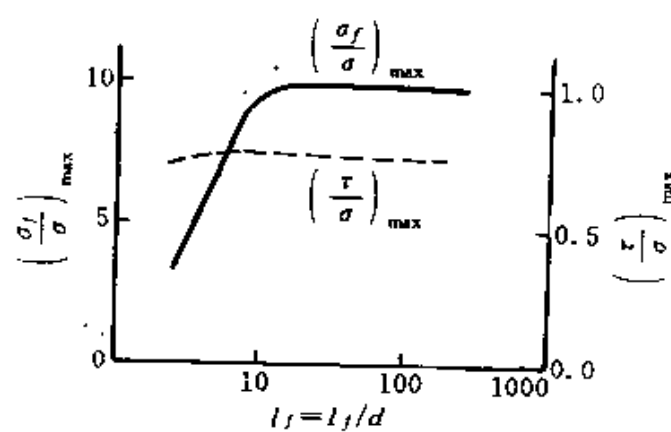


图 4.12 $(\sigma_f)_{\max}$ 和 $\tau_{\max}$ 与 a_f 的关系曲线^[6]

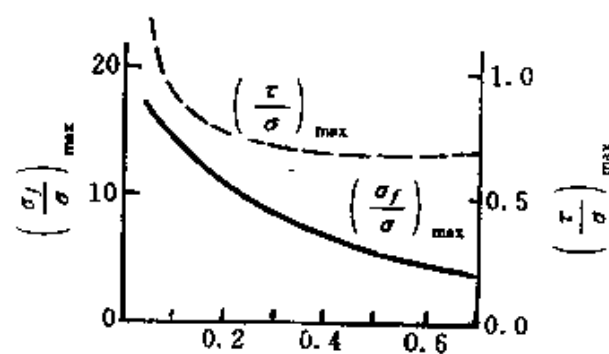


图 4.13 $(\sigma_f)_{\max}$ 和 $\tau_{\max}$ 与 V_f 的关系曲线^[6]

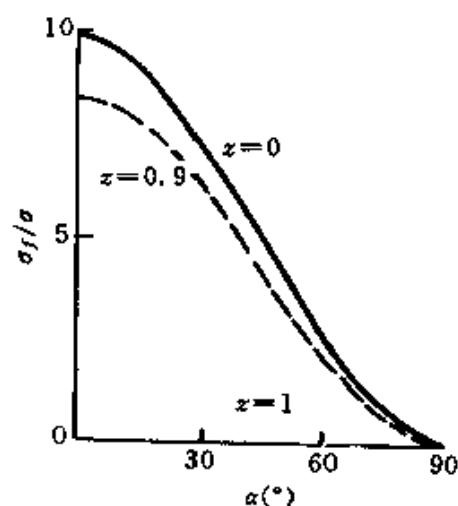


图 4.14 σ_f/σ 与 α 的关系曲线^[6]

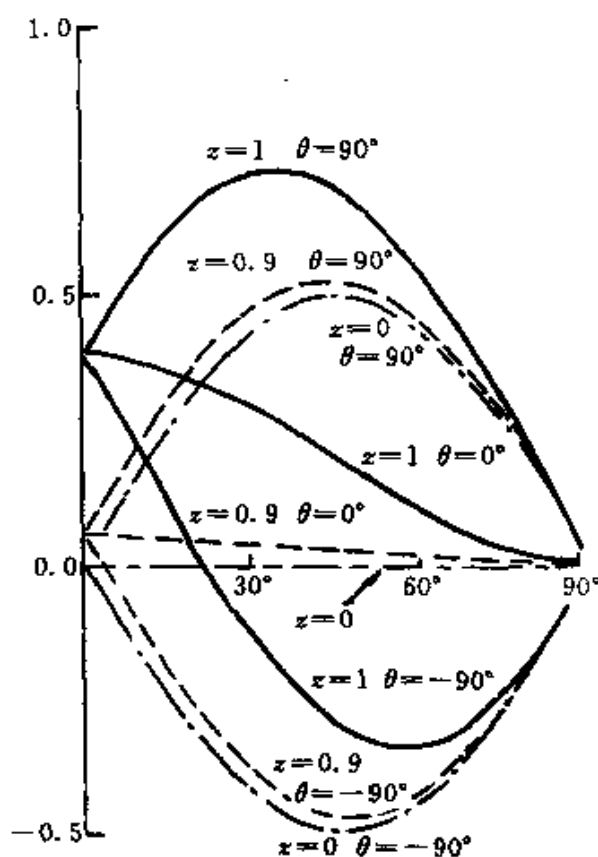


图 4.15 τ/σ 与 α 的关系曲线^[6]

与基体性能均与 SMC-R30 相同。

§ 4.1.6 纤维之间的相互作用

短纤维增强复合材料中纤维之间的相互作用比连续纤维的情况更加复杂。尤其是在前面分析中往往不考虑纤维两端所承受的拉伸载荷,这将无法考虑到纤维所承受的轴向力将主要通过纤维两端传递给相邻纤维的这一事实。为了研究纤维的相互作用, Fukuda 和 Chou^[3]利用研究连续纤维应力集中问题时的剪滞法原理,考虑到纤维尖端所承担的轴向载荷,对这一问题进行了较为详尽的研究。这一模型得到的结果尤其适用于金属基复合材料等纤维基体界面结合完好的情况。

二维复合材料模型如图 4.16 所示。图中未画阴影线部分表示是基体,它们也承担轴向应力,可以将它们理解成具有不同模量的

纤维。其中纤维的直径及基体层的宽度分别为 d 及 h 。沿纤维方向一代表性区域可以分成 n 个部分,而在整个区域中的等效连续纤维数由 $i = 1$ 至 $i = m$ 。图 4.17 绘出了应力平衡图,这样,沿纤维 x 方向的平衡方程可以表示成,

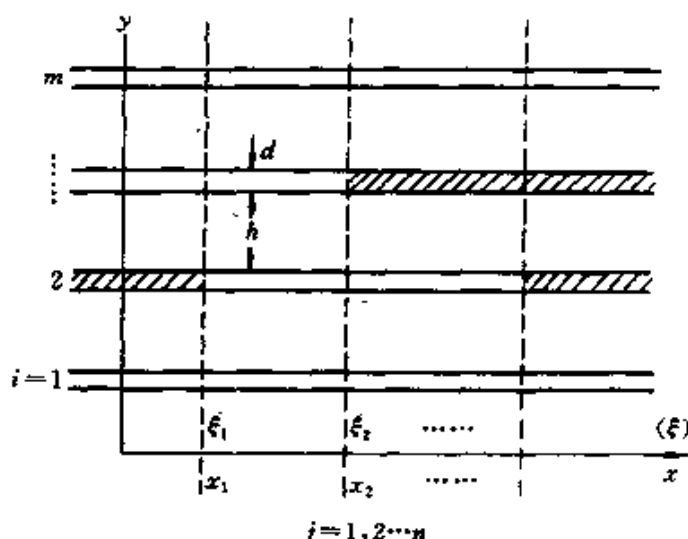


图 4.16 纤维成排排布的复合材料单元

$$\frac{dp_{1j}}{dx} + \tau_{1j} = 0$$

$$\frac{dp_{ij}}{dx} + \tau_{ij} - \tau_{i-1j} = 0 \quad (i = 2, \dots, m-1) \quad (4.71)$$

$$\frac{dp_{mj}}{dx} - \tau_{m-1j} = 0$$

式中, p_{ij} 及 τ_{ij} 分别为第 i 个纤维的轴向载荷及第 j 个区域的界面剪应力。线弹性变形的假设导致如下的应力 - 应变关系。

$$p_{ij} = E_{ij} \frac{du_{ij}}{dx} \quad (4.72)$$

$$\tau_{ij} = \frac{G}{h} (u_{i+1j} - u_{ij}) \quad (4.73)$$

式中, G 及 u 分别表示基体的剪切模量及纤维的轴向位移, 下标 i 及 j 表示第 i 根纤维的第 j 段。 E_{ij} 即可以等于纤维的拉伸模量, 又

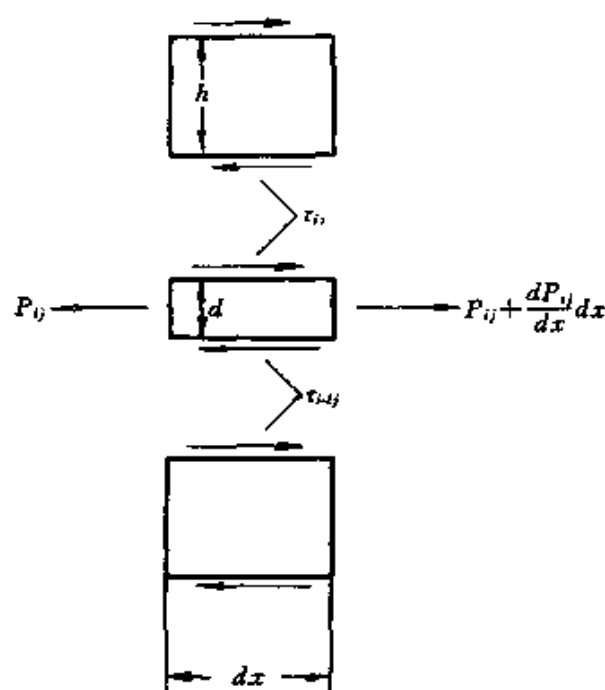


图 4.17 材料单元应力平衡图

可以等于基体的拉伸模量,将根据具体区块的情况而定。

考虑如图 4.18 所示材料的简单例子。一系列等长的短纤维周围存在有两列连续纤维,设定 $i = 1, 2, j = 1, 2$, 可以联立求得 (4.71), (4.72) 及 (4.73) 式,其结果如下

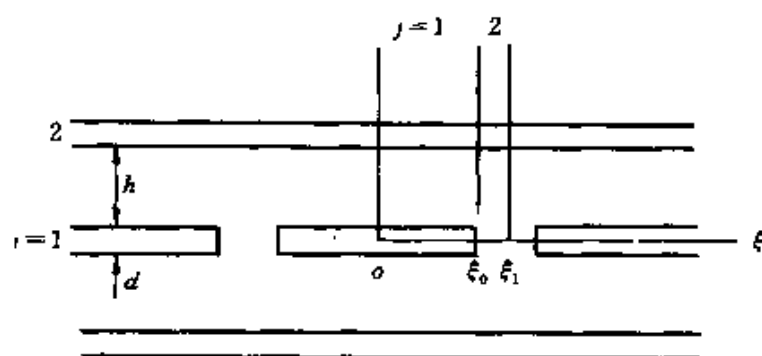


图 4.18 简单复合材料单元算例

$$u_{11} = A_1 + B_1 \zeta + C_1 e^{\lambda \zeta} + D_1 e^{-\lambda \zeta}$$

$$\begin{aligned}
u_{21} &= A_1 + B_1\zeta - \frac{1}{2}(C_1e^{\lambda_1\zeta} + D_1e^{-\lambda_1\zeta}) \\
p_{11} &= E_f\{B_1 + \lambda_1(C_1e^{\lambda_1\zeta} - D_1e^{-\lambda_1\zeta})\} \\
p_{21} &= E_f\{B_1 - \frac{1}{2}\lambda_1(C_1e^{\lambda_1\zeta} - D_1e^{-\lambda_1\zeta})\} \\
u_{12} &= A_2 + B_2\zeta + C_2e^{\lambda_2\zeta} + D_2e^{-\lambda_2\zeta} \\
u_{22} &= A_2 + B_2\zeta - \frac{k}{2}(C_2e^{\lambda_2\zeta} + D_2e^{-\lambda_2\zeta}) \\
p_{12} &= E_m\{B_2 + \lambda_2(C_2e^{\lambda_2\zeta} - D_2e^{-\lambda_2\zeta})\} \\
p_{22} &= E_f\{B_2 - \frac{k_2}{2}\lambda_2(C_2e^{\lambda_2\zeta} - D_2e^{-\lambda_2\zeta})\}
\end{aligned} \tag{4.74}$$

式中 $\zeta = x/d$, 且 $\alpha_{ij} = E_i h / Gd$,

$$k = E_m / E_f, \lambda_j = (\frac{\alpha_{1j} + 2\alpha_{2j}}{\alpha_{1j}\alpha_{2j}})^{1/2} \tag{4.75}$$

其中, $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ 是由边界条件而确定的未知常数。边界条件如下:

(1) 对称条件

$$(u_{11})_{\zeta=0} = 0, (u_{21})_{\zeta=0} = 0, (u_{12})_{\zeta=\zeta_1} = (u_{22})_{\zeta=\zeta_1} \tag{4.76}$$

(2) 连续性条件

$$\begin{aligned}
(u_{11})_{\zeta=\zeta_0} &= (u_{12})_{\zeta=\zeta_0}, & (u_{21})_{\zeta=\zeta_0} &= (u_{22})_{\zeta=\zeta_0} \\
(p_{11})_{\zeta=\zeta_0} &= (p_{12})_{\zeta=\zeta_0}, & (p_{21})_{\zeta=\zeta_0} &= (p_{22})_{\zeta=\zeta_0}
\end{aligned} \tag{4.77}$$

(3) 平衡条件

$$p_{11} + 3p_{21} = 3p_0, \quad p_{12} + 2p_{22} = 3p_0 \tag{4.78}$$

式中, $3p_0$ 是外加载荷, ζ_0 及 ζ_1 的定义如图 4.18 所示。上述 9 个边界条件中有 8 个是独立的, 可以确定 8 个未知常数。最终可求得轴向应力分布为

$$\begin{aligned}
p_{11}/p_0 &= 1 - \frac{2\lambda_1(1-k)}{3F} \sinh\lambda_2(\zeta_1 - \zeta_0) \cosh\lambda_2\zeta \\
p_{21}/p_0 &= 1 + \frac{\lambda_1(1-k)}{3F} \sinh\lambda_2(\zeta_1 - \zeta_0) \cosh\lambda_1\zeta \\
p_{21}/p_0 &= \frac{3k}{2+k} \{1 + \frac{2\lambda_2(1-k)}{3F} \sinh\lambda_1\zeta_0 \cosh\lambda_2(\zeta - \zeta_1)\} \\
p_{22}/p_0 &= \frac{3}{2+k} \{1 - \frac{k\lambda_2(1-k)}{3F} \sinh\lambda_1\zeta_0 \cosh\lambda_2(\zeta - \zeta_1)\}
\end{aligned} \tag{4.79}$$

式中

$$F = k\lambda_2 \cosh \lambda_2 (\zeta_1 - \zeta_0) \sinh \lambda_1 \zeta_0 + \frac{2+k}{3} \lambda_1 \sinh \lambda_2 (\zeta_1 - \zeta_0) \cosh \lambda_1 \zeta_0 \quad (4.80)$$

作为单根短纤维的特例,半无限长及两个半无限长纤维均可以进行研究,令上式中的 $k = 0$,可以得到纤维端部不承担拉伸载

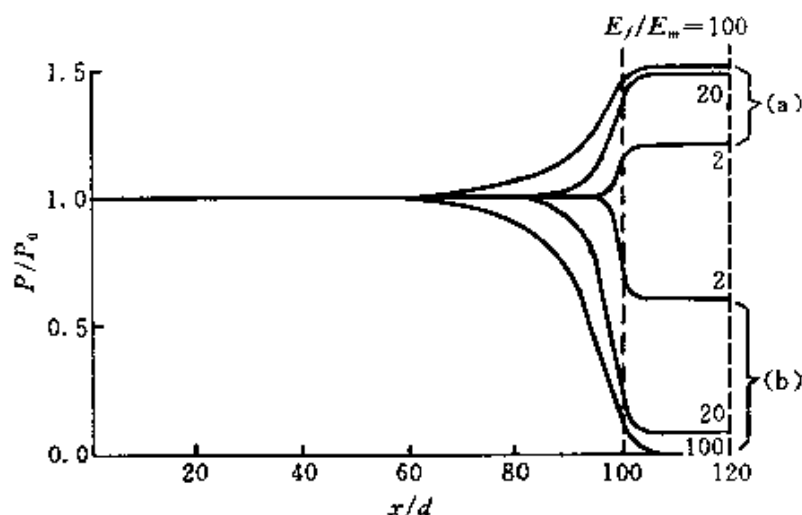


图 4.19 纤维与基体模量之比对纤维中载荷分布的影响^[3]

荷时的解。图 4.19 绘出了不同 E_f/E_m 值条件下,连续纤维及非连

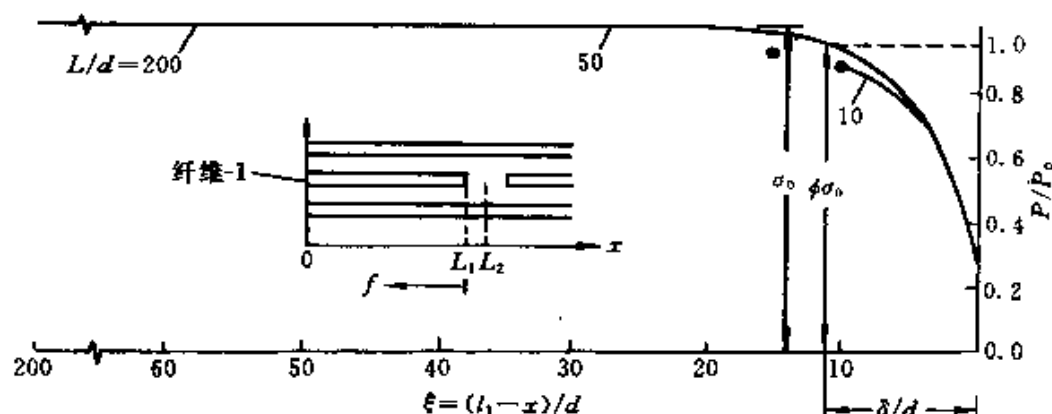


图 4.20 纤维 1 中轴向应力分布^[3]

续纤维的轴向应力分布,值得注意的是,给定 E_f/E_m 及 h/d 值,纤维端部所承受的轴向应力基本上不随纤维的长度而变。这一趋势如图 4.20 所示。

在本节中,花了大量篇幅研究短纤维增强复合材料中应力分布问题,因为这无论是预报复合材料的强度,还是预报应力-应变曲线都必须基于这种应力分布知识,在下面几节中,我们将利用本节所得到的应力分布规律预报复合材料的强度等宏观性能中。

§ 4.2 单向增强短纤维复合材料强度模型

短纤维增强复合材料强度的预报相对于连续纤维强度问题是更困难的问题,主要原因是由于纤维中应力的分布更加复杂。关于这一问题的研究方法,目前主要分为两大类,一类方法是首先找出载荷沿纤维的分布,并计算得到相应的平均值,进而采用混合律的方法计算得到短纤维复合材料的强度预报公式。这类方法简便,得到的结果也比较简单,但由于没考虑到应力集中的影响,预报的结果较实验值偏高。另一类方法比较详尽地描述材料随机细观结构,并进而求得最大应力集中值,在此基础上,引入细观强度准则,导出复合材料的宏观强度。

对于单向短纤维增强复合材料,问题相对比较简单。Kelly 和 Tyson^[8,9], Kelly 和 Davis^[10], Kelly^[11,12] 和 Hale 和 Kelly^[13] 关于混合律模型作了大量工作,得到

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} v_f + \sigma'_{mu} (1 - v_f) \quad (4.81)$$

式中, σ_{cu} 及 σ_{fu} 分别表示复合材料的拉伸强度及纤维的拉伸强度, σ'_{mu} 表示对应于复合材料破坏应变时的基体所承担的应力。等式 (4.81) 导出时所包含的最基本假设是复合材料中纤维及基体在外载作用下应变相等。而对于短纤维增强复合材料来说,这一假设不成立,因此必须做相应的修改。

假设纤维与基体界面的剪应力为常量,则根据前而的计算结果,可以知道,纤维的轴向拉应力将由两端的 0 值以线性方式逐渐

增至中间的最大值。如果纤维的极限强度为 σ_{fu} , 则为了达到这一值, 纤维的长度必须大于某一临界值 l_c 。纤维临界长度值由下式确定,

$$\frac{l_c}{d} = \frac{\sigma_{fu}}{2\tau} \quad (4.82)$$

式中, τ 为界面或基体的剪切强度。

引入纤维临界长度的概念, 并利用前文相对于不同情况求得的在最大应力等于纤维强度 σ_{fu} 条件下的纤维内平均应力公式, 我们得到如下混合律计算强度的公式

$$\begin{aligned} \sigma_{cu} &= \bar{\sigma}_f v_f + (1 - v_f) \sigma'_{mu} \\ &= \sigma_{fu} [1 - (1 - \delta) l_c / l] + \sigma'_{mu} (1 - v_f) \end{aligned} \quad (4.83)$$

式中, δ 定义为应力分布曲线在 $[0, l_c/2]$ 区间内的面积与 $\sigma_{fu} l_c/2$ 的比值(图 4.21)。如果界面剪切应力为常值, 则 $\delta = 1/2$, 可以得到如下公式:

$$\begin{aligned} \sigma_{cu} &= \sigma_{fu} (1 - l_c/2l) v_f + \sigma'_{mu} (1 - v_f) & l \geq l_c \\ \sigma_{cu} &= \sigma_{fu} v_f l / 2l_c + \sigma'_{mu} (1 - v_f) & l \leq l_c \end{aligned} \quad (4.84)$$

方程(4.84)的预报结果表明, $l/l_c = 10$ 时, 纤维中的平均应力可以达到连续纤维的 90%。实验表明, 式(4.84)预报金属基及树脂基复合材料的强度较好。

如果纤维为纯弹性变形, 则 $\sigma_{fu} = E_f \epsilon_{cu}$, 其中 ϵ_{cu} 为复合材料的断裂应变, 方程(4.82)式可以写成

$$\frac{l_c}{d} = \frac{E_f \epsilon_{cu}}{2\tau} \quad (4.85)$$

如果增强复合材料的纤维具有不同的长度, Bowyer 及 Bader^[14] 曾经证实相对于任何复合材料的临界应变, 均存在一临界长度,

$$l_c = \frac{E_f \epsilon_{cu} d}{2\tau} \quad (4.86)$$

比 l_c 短的纤维将承担如下的平均应力

$$\bar{\sigma}_f = \frac{l\tau}{d} \quad (4.87)$$

$\bar{\sigma}_f$ 值总是小于 $1/2 E_f \epsilon_{cu}$ 。如果纤维比临界长度长, 它所承担的平均

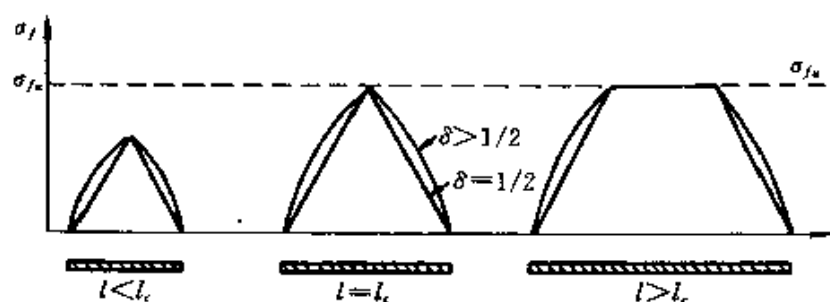


图 4.21 短纤维复合材料纤维临界长度

应力为

$$\bar{\sigma}_f = E_f \epsilon_{cu} \left(1 - \frac{E d \epsilon_{cu}}{4 l \tau}\right) \quad (4.88)$$

这种情况下, $\bar{\sigma}_f$ 总是大于 $1/2 E_f \epsilon_{cu}$ 。

如果复合材料中含有不同长度的纤维,对于给定的应变可以将这些纤维分成长度大于临界长度的纤维及小于临界长度的纤维,小于临界长度的纤维长度分别为 l_i ,相应的体积含量为 v_i ,而大于临界长度的纤维长度分别为 l_j ,其相应的体积含量为 v_j ,因此,可以得到复合材料的强度公式为

$$\sigma_{cu} = \sum_i \frac{\tau l_i v_i}{d} + \sum_j E_f \epsilon_{cu} \left(1 - \frac{E_f \epsilon_{cu} d}{4 l_j \tau}\right) v_j + E_m \epsilon_{cu} (1 - v_f) \quad (4.89)$$

在前面的讨论中,未考虑复合材料中最大应力集中的影响。由于短纤维复合材料具有典型的随机微结构,因此,必须发展不同的统计学模型用于计算材料中的最大应力集中系数,并进而预报复合材料的强度。

短纤维增强复合材料纤维的长度不同,其破坏机理也不同(图 4.22)。当纤维很短时,裂纹总是在纤维尖端萌生,然后,裂纹将绕过周围纤维而导致复合材料的断裂(图 4.22a),这过程并不导致纤维的断裂。当纤维比较长时,纤维尖端的微裂纹将导致周围纤维的断裂,进而导致复合材料的断裂。这里,我们主要考虑后一种破坏机理,即以纤维的断裂作为复合材料破坏的主要特征。

因此,复合材料的强度可以定义为导致第一根纤维断裂的应

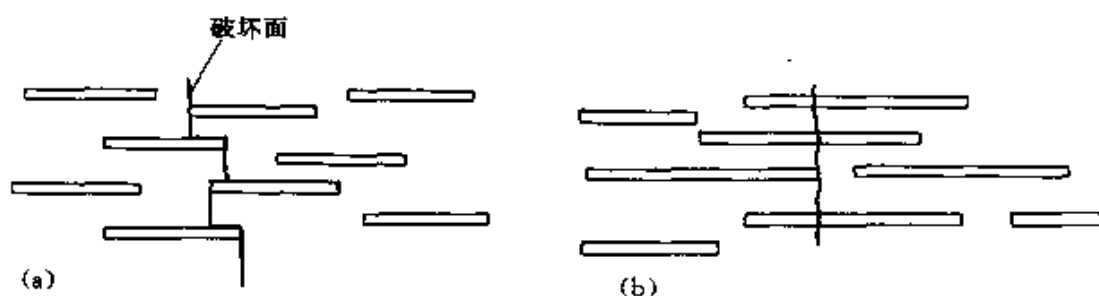


图 4.22 短纤维复合材料两类破坏模式

力。这样,确定纤维所承担的最大应力是预报复合材料的强度的最关键的环节。图 4.23 绘出了沿短纤维应力分布的示意图。沿纤维的平均应力为

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma(x) dx \quad (4.90)$$

如果复合材料中纤维长度是一随机变量,其概率密度函数为 $f(l)$, 则纤维中平均应力为

$$\bar{\sigma}_f = \int_0^\infty f(l) \left\{ \frac{1}{l} \int_0^l \sigma(x) dx \right\} dl \quad (4.91)$$

如果 K 表示最大应力集中因子,即

$$\sigma_{\max} = \sigma_{fu} = K\sigma_0 \approx K\bar{\sigma}_f \quad (4.92)$$

则复合材料的拉伸强度可表示成

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} / Kv_f + \sigma'_{mu}(1 - v_f) \quad (4.93)$$

通过对短纤维复合材料的拉伸实验可以发现在较低载荷的作用下,纤维尖端处会萌生许多微裂纹,进而降低了某一最危险断面的承载能力,而导致复合材料的破坏。基于复合材料的这种破坏机理,引入“临界区”的概念(如图 4.24 所示)。临界区的宽度为 βl , 其中 $0 < \beta \leq 1$, 这样,由于纤维分布的随机性,有些纤维的端点终止在该“临界区”内,而有些纤维则整体跨过该“临界区”。这样,第一类纤维可以认为对该断面的承载无任何贡献,而第二类纤维对复合材料强度至关重要。在该区域内出现一个端点在其中的概率为 β , 而出现一个桥联纤维的概率为 $1 - \beta$ 。

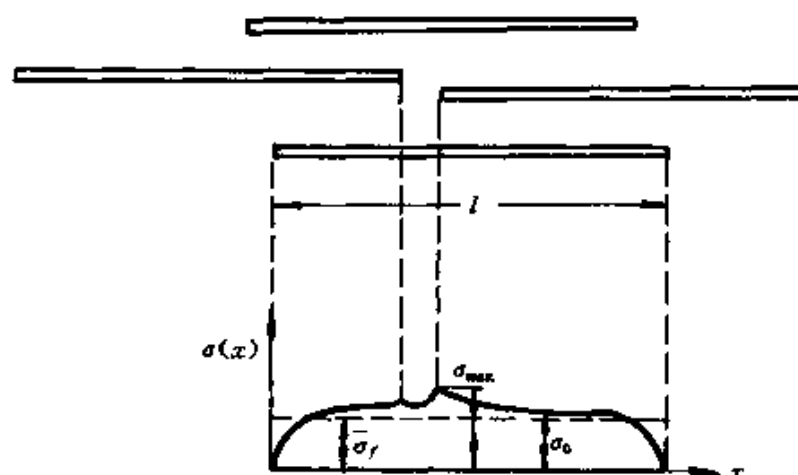


图 4.23 拉伸应力沿短纤维分布

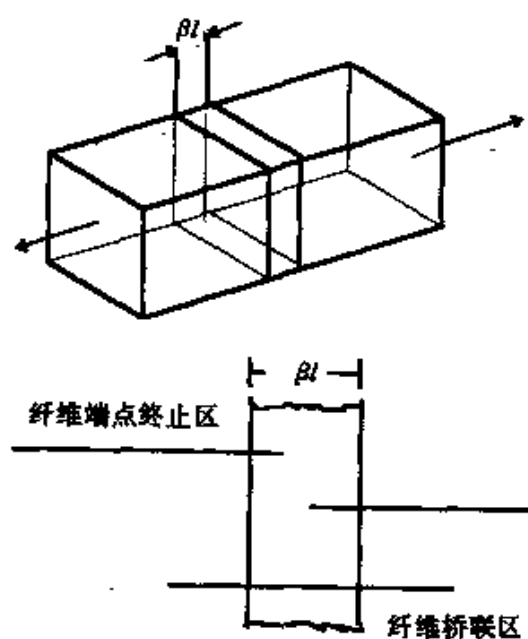


图 4.24 复合材料“临界区”示意图

考察某一横断面，端点终止于该断面及桥联跨过该横断面的纤维位置呈随机分布，一二维复合材料的断面内纤维的分布如图 4.25 所示。终止纤维及穿过纤维分别用黑色圆圈及白色圆圈表示。在外加载荷作用下，由于应力集中的影响，穿过纤维承担的载

荷比较大,这样,当其中应力超过纤维的拉伸强度时将导致纤维的破坏,并进而导致复合材料的破坏。这样,如何计算得到桥联纤维承担的载荷是预报复合材料强度的关键。在下面,我们将详细介绍求解这一应力集中问题的方法。

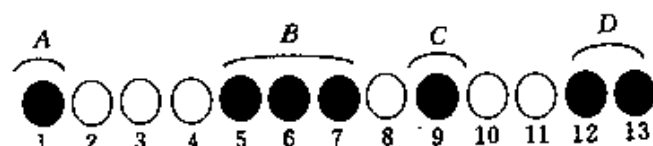


图 4.25 二维复合材料单元横断面示意图

考虑如图 4.26 所示的单向短纤维增加复合材料。首先引入如下假设以便能够求得纤维的应力集中因子。(1) 纤维具有同样的长度 l , (2) 沿轴向成排排布, (3) 排与排之间距离相同, (4) 纤维端点终止于“临界区” βl 内的纤维认为其端点均终止于 zz' 横截面上。为了计算桥联纤维所承担的载荷,可以只研究该纤维两端终止纤维的影响,这样的应力集中系数我们在第三章中已经求得。忽略复合材料中基体的承载能力,复合材料的强度可以表示为

$$\sigma_{cn} = \sigma_{fn} / K_b \quad (4.94)$$

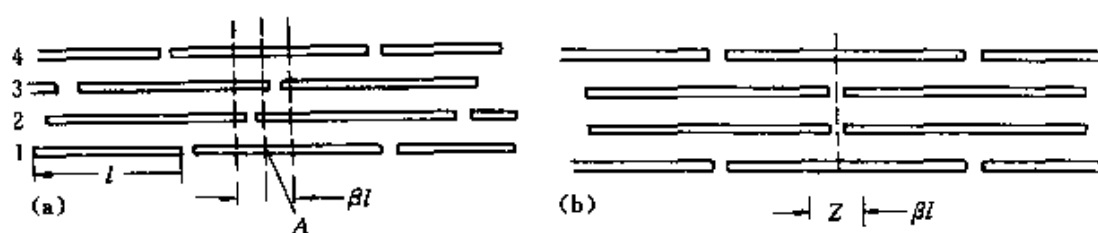


图 4.26 二维复合材料的临界断面

当基体可以发生较大的塑性变形时(图 4.27),桥联纤维两端终止纤维总数目为 b 的条件下,其应力集中因子为

$$K_b \approx 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{T_0}{\sigma_0} \right) [nl(b\sigma_0/T_0) + \gamma] \quad (4.95)$$

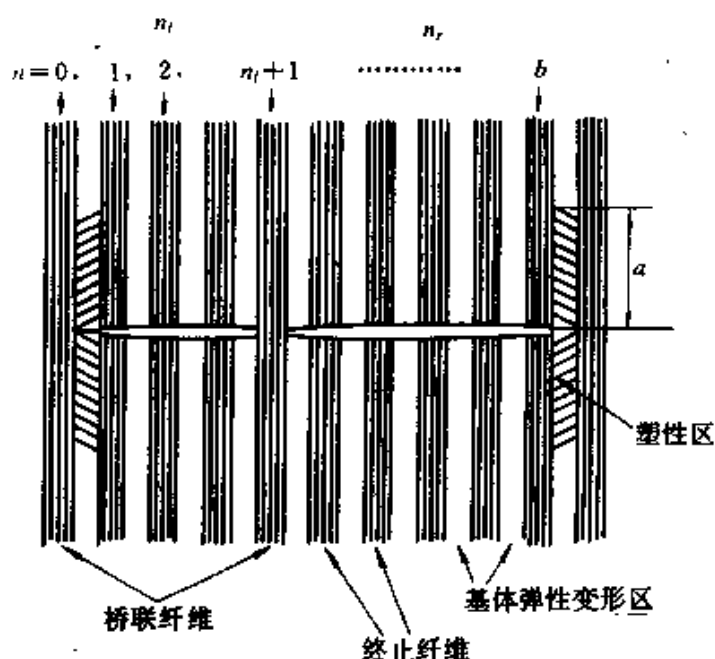


图 4.27 用于计算应力集中系数的复合材料单元

式中

$$T_0 = \tau_m (h E_f / G_m A_f)^{1/2} \quad (4.96)$$

并且, σ_0 为外载, $\gamma (= 0.577)$ 为欧拉常数, τ_m 为基体剪切强度, h 为纤维之间横向距离, A_f 为纤维横截面积。

为了计算复合材料中的最大应力集中系数, 我们如下将首先研究一下纤维端点在空间的分布形态。

考察某一指定的纤维端点, 该端点所在的临界区域含有 n 个端点的概率为

$$P_n = n \beta^{n-1} (1 - \beta)^2 \quad (4.97)$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1 \quad (4.98)$$

该纤维端点所处的临界区域内含有的纤维端点不超过 n 的概率为

$$Q_n = 1 - \sum_{i=n+1}^{\infty} P_i \quad (4.99)$$

如果各个纤维端点的分布是相互独立的,可以求得含有多于 n 个纤维端点的“临界区”不存在的概率为

$$\tilde{P}(n) = (Q_n)^N \quad (4.100)$$

式中, N 为复合材料单元中纤维的总数。事实上对于任一纤维 Q_n 之间并不是相互独立的,当纤维总数 N 远大于“临界区”中存在的平均端点数 $\bar{n}$ 时,可以将 $\tilde{P}(n)$ 表示成

$$\tilde{P}(n) = (Q_n)^{N/\bar{n}} \quad (4.101)$$

式中

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n \quad (4.102)$$

利用等式(4.97)及(4.98),(4.101)式成为

$$\tilde{P}(n) = \{1 - \beta^n [n(1 - \beta) + 1]\}^{N\beta'} \quad (4.103)$$

式中

$$\beta' = \frac{1}{\bar{n}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \quad (4.104)$$

图 4.28 绘出了做为 N 及 β 函数的 $\tilde{P}(n)$ 变化曲线, $\tilde{P}(n)$ 类似于一阶梯函数,当 n 增至 M 值时, $\tilde{P}(n)$ 由 0 增至 1。由于 $n = M$ 出现的概率基本上等于 1,因此 M 被称为“最可能出现的纤维端点数”,其值由下式确定

$$\beta^M [M(1 - \beta) + 1] N \beta' = 1 \quad (4.105)$$

M 随 β 及 N 的变化曲线如图 4.29 所示。当 N 很大时,利用 $1 - x = \exp(-x)$,则 $\tilde{P}(n)$ 可由下式确定

$$\tilde{P}(n) \approx \exp[-N\beta^M M(1 - \beta)^2] \quad (4.106)$$

已知了端点数目的分布及“最可能出现的端点数” M ,即可以依据剪滞法模型求得桥联纤维承担的最大应力,其复合材料强度可由下式确定,

$$\sigma_{cu} = \sigma_a v_f + \sigma'_{mu} (1 - v_f) \quad (4.107)$$

式中, σ'_{mu} 是纤维断裂时基体承担的应力, σ_a 是纤维中最大应力达到 σ_{fu} 时纤维所承担的平均应力, σ_a 满足如下方程

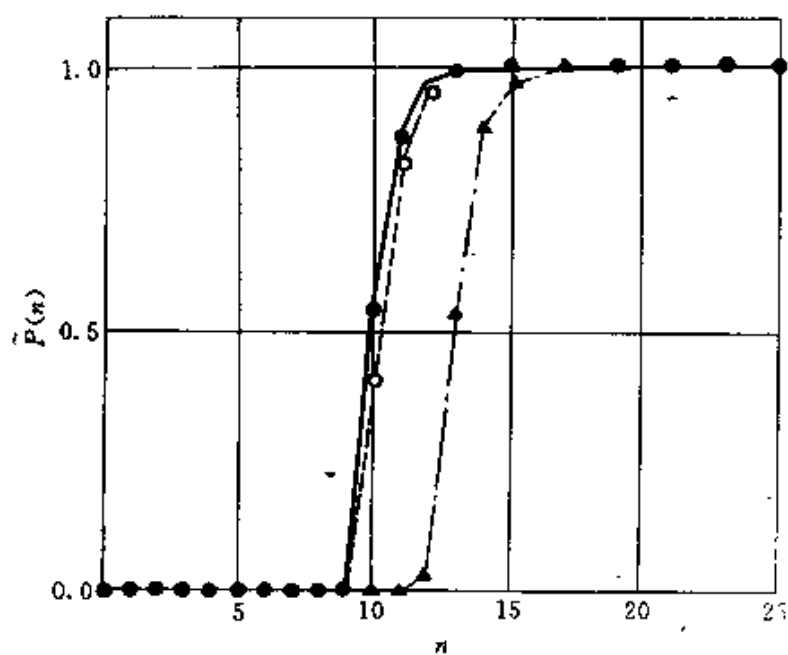


图 4.28 最大纤维端点数目概率分布曲线^[15]

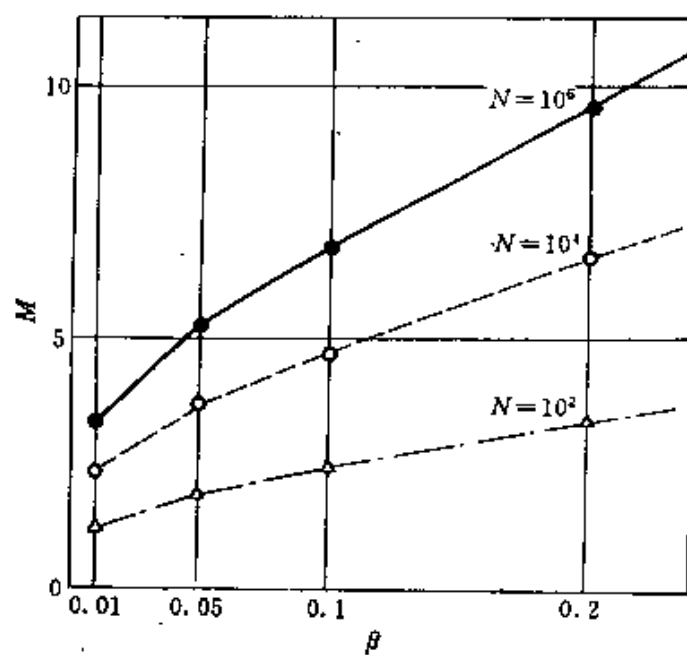


图 4.29 最可能出现的纤维端点数目随 β 变化曲线^[15]

$$\sigma_{fu} = K[\sigma_a - \eta\sigma_m(1 - v_f)/v_f] \quad (4.108)$$

式中, σ_{my} 为基体屈服应力。

对于三维复合材料来说,问题就更加复杂,因为即使给定了纤维端点数目也不能唯一地确定某一临界区内纤维端点的分布形态。为了简化处理,Hikami 及 Chou^[15] 等考虑呈正方排布的复合材

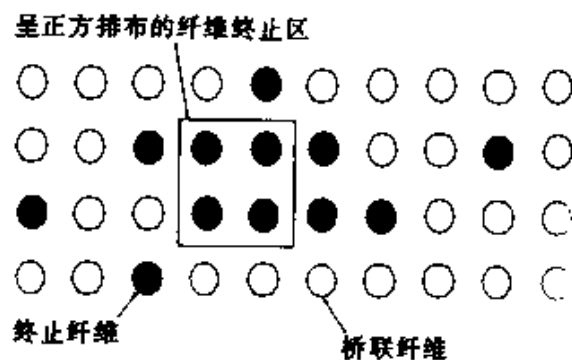


图 4.30 三维复合材料横断面示意图

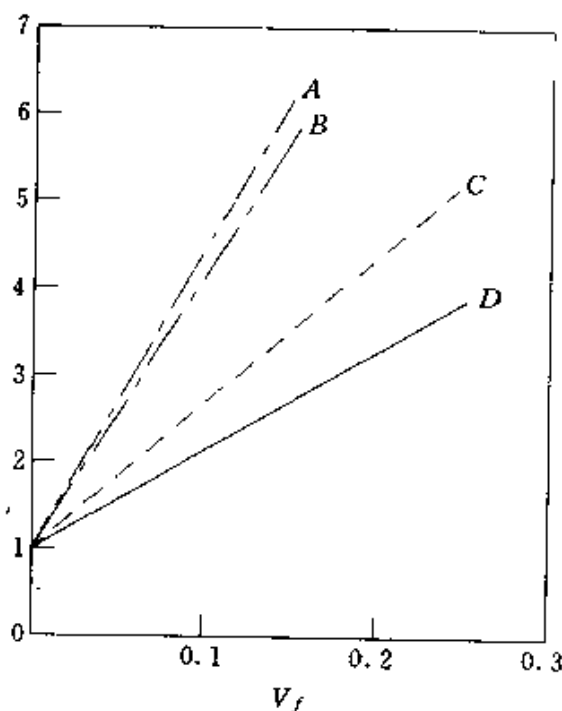


图 4.31 复合材料强度随纤维体积含量变化曲线^[15]

料单元(图 4.30),同样,图中黑圈及白圈分别表示终止纤维及桥联纤维。对于弹性基体复合材料,其强度随纤维体积含量变化曲线

如图 4.31 所示,其中,采用玻璃纤维增强热塑性基体复合材料的性能,纤维长度 $l = 1\text{mm}$,纤维直径 $d = 0.01\text{mm}$,纤维临界长度 $l_c = 0.1\text{mm}$, $\beta = 0.1$, $\frac{\sigma_{fu}}{\sigma'_{mu}} = \frac{E_f}{E_m} = 35.2$ 。图 4.31 中,线 A 及线 B 分别为不计及应力集中效果的长纤维及短纤维强度计算值,虚线及实线是考虑应力集中利用三维及二维复合材料模型计算得到的强度值,可见预报的结果远低于混合律给出的结果,实验结果应该落在这两种方法得到的上、下限之间。

§ 4.3 随机短纤维增强复合材料

当复合材料中纤维方位为随机变量时,复合材料的宏观强度与单向纤维增强复合材料有较大的不同。最简便的处理方法是采用 Cox^[1], Bowyer 及 Bader^[14] 引入的纤维方位因子 C_0 的概念,即在前面所导出的混合律强度公式中,用 C_0 乘上纤维所承担的平均载荷,其中 $0 < C_0 \leq 1$,当 $C_0 = 1$ 时,纤维是沿某一方向单向分布的。 C_0 可以通过引入纤维方位角度分布的概念进行计算,并且发现在较小应变的条件下, C_0 与外加应变及纤维长度无关,这样,混合律公式可以写成

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} v_f F(l_c/\bar{l}) C_0 + \sigma'_{mu} (1 - v_f) \quad (4.109)$$

式中, $F(l_c/\bar{l})$ 是纤维平均长度与纤维临界长度比值的函数。

下面我们将着重介绍 Fukuda 及 Chou(1982)^[4] 采用的用于预报随机短纤维复合材料概率强度的理论。首先,研究一下短纤维分布的几何模型。图 4.32 绘出了长度为 l 的纤维相对位置及方位的分布形态。

这里,我们同样针对某一临界区引入终止纤维及桥联纤维的概念,“临界区”的长度为 $\beta\bar{l}$, $\bar{l}$ 为纤维的平均长度,由下式确定

$$\bar{l} = \int_0^{\infty} l h(l) dl \quad (4.110)$$

式中, $h(l)$ 为纤维长度的概率密度函数。

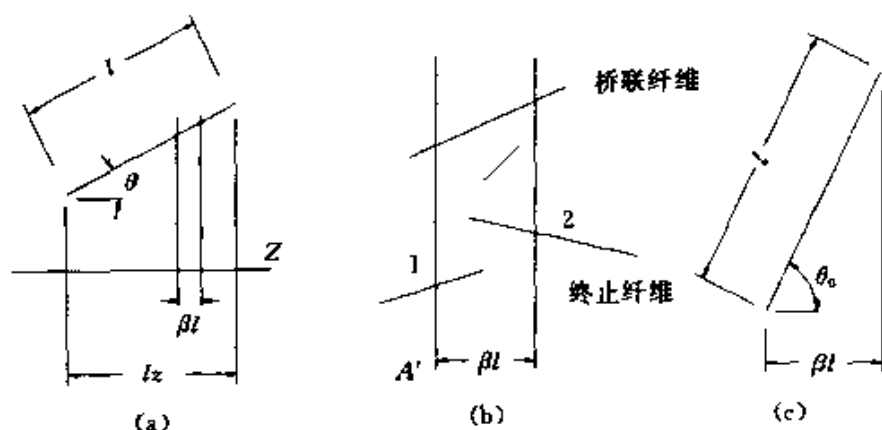


图 4.32 几类复合材料纤维分布示意图

纤维长度沿 z 向的投影为 $l_z = l \cos \theta$, 我们可以求得某一长度的纤维成为一桥联纤维的临界角度 θ_0 , 对于 $\beta \bar{l} \leq l$,

$$\theta_0 = \cos^{-1} \beta \bar{l} / l \quad (4.111)$$

如果 $\beta \bar{l} > l$, 该纤维不可能成为桥联纤维, θ_0 的定义无任何意义。这样, 对于纤维方位相对于 z 轴是随机变量的短纤维复合材料, 某一长度为 l 的纤维在某一“临界区”内为一终止纤维的概率为

$$P_t = \frac{\beta \bar{l}}{l_z} = \begin{cases} \beta \bar{l} / l \cos \theta & (0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ 及 } \beta \bar{l} \leq l) \\ 1 & (\theta_0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ 或 } \beta \bar{l} \geq l) \end{cases} \quad (4.112)$$

成为桥联纤维的概率为

$$P_b = 1 - P_t \quad (4.113)$$

下面考察短纤维承担的平均应力。首先, 如果纤维方向与外载方向平行时, 纤维承担的平均应力为

$$\sigma_{f0} = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_f(z) dz = \begin{cases} \sigma_{fu} (1 - \frac{l_c}{2l}) & l > l_c \\ \sigma_{fu} \frac{l}{2l_c} & l < l_c \end{cases} \quad (4.114)$$

在导出(4.114)式时, 我们假设界面的剪切应力为常值。一根纤维承担的载荷为 $\sigma_{f0} A_f$, 其中 A_f 为纤维的横截面积。

当某一纤维方向与外加载荷方向成某一角度 θ 时, 外加载荷可沿纤维分解成平行拉应力及沿界面的剪应力

$$\sigma'_0 = \sigma_0 \cos^2 \theta \quad (4.115)$$

$$\tau'_0 = \sigma_0 \sin \theta \cos \theta \quad (4.116)$$

如果忽略沿界面剪切载荷对纤维内应力分布的影响,纤维所承担的平均载荷为

$$F_x = A_f \sigma_{f0} \cos^3 \theta$$

如果长方形的复合材料试件长宽高分别为 c, a, b , 其试件体积为

$$v = abc \quad (4.117)$$

因此,纤维的体积含量可由下式确定,

$$v_f = N A_f \bar{l} / v \quad (4.118)$$

式中, N 及 A_f 分别为试件内纤维总数及纤维的横截面积。

由于纤维的长度及方位均是随机变量,沿 z 轴方向纤维长度投影的均值为

$$\begin{aligned} \bar{l}_x &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty l \cos \theta h(l) g(\theta) dl \\ &= \bar{l} \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (4.119)$$

式中, $g(\theta)$ 为沿纤维方向相对于 z 轴角度的概率密度函数。 $N\bar{l}_x$ 值等于纤维沿 z 轴投影的总长度的均值,如果再除以试件长度 c 值,则可以求得跨越任一横断面的平均纤维数 N_c 。

$$N_c = \frac{N\bar{l}_x}{c} = \frac{abv_f}{A_f} \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos \theta d\theta \quad (4.120)$$

根据(4.112)式,可以求得任一纤维在“临界区”中为一终止纤维的概率为

$$q_e = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty P_e h(l) g(\theta) dl \quad (4.121)$$

同样,任一纤维为一桥联纤维的概率为

$$q_b = 1 - q_e \quad (4.122)$$

将(4.112)式及(4.113)式代入如上二式中,可以得到

$$q_e = \int_0^{\theta_0} d\theta \left\{ \int_0^{\bar{l}} g(\theta) h(l) dl + \int_{\bar{l}}^{\infty} \frac{\beta \bar{l}}{l \cos \theta} g(\theta) h(l) dl \right\} \\ + \int_{\theta_0}^{\pi/2} d\theta \int_{\bar{l}}^{\infty} g(\theta) h(l) dl \quad (4.123)$$

$$q_b = \int_{\bar{l}}^{\infty} dl \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{\beta \bar{l}}{l \cos \theta} \right) g(\theta) h(l) dl \quad (4.124)$$

在任一指定横截面内终止纤维及桥联纤维的平均数目为

$$N_e = N_c q_e \quad (4.125)$$

$$N_b = N_c q_b \quad (4.126)$$

在该指定截面任一纤维所承担的平均载荷为

$$\bar{F}_e = \int_0^{\theta_0} d\theta \int_{\bar{l}}^{\infty} F_e h(l) g(\theta) dl \quad (4.127)$$

这样,桥联纤维承担的总载荷为

$$F_T = N_b \cdot \bar{F}_e \quad (4.128)$$

根据混合律,可以得到复合材料承担的总载荷为

$$\sigma_{cu} = \frac{F_T}{ab} + \sigma'_{mu}(1 - v_f) \\ = \sigma_{fu} v_f \int_0^{\pi/2} g(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^{\theta_0} g(\theta) \cos^3 \theta d\theta \int_{\bar{l}}^{\infty} dl \int_0^{\theta_0} \left(1 - \frac{\beta \bar{l}}{l \cos \theta} \right) \\ \cdot g(\theta) d\theta \left[\int_{\bar{l}}^{l_c} \frac{l}{2l_c} h(l) dl + \int_{l_c}^{\infty} \left(1 - \frac{l_c}{2l} \right) h(l) dl \right] \\ + \sigma'_{mu}(1 - v_f) \quad (4.129)$$

当复合材料为单向纤维增强复合材料,纤维长度为 $\bar{l}$ 时,等式(4.129)成为

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fu} v_f (1 - \beta) \left(1 - \frac{l_c}{2\bar{l}} \right) + \sigma'_{mu}(1 - v_f) \quad (\bar{l} > l_c) \\ \sigma_{cu} = \sigma_{fu} v_f (1 - \beta) \frac{\bar{l}}{2l_c} + \sigma'_{mu}(1 - v_f) \quad (\bar{l} < l_c) \quad (4.130)$$

当单向纤维增强复合材料的纤维长度为一随机变量,并令 β

→ 0, 这相应于所有纤维均为桥联纤维, 纤维长度的概率密度函数为

$$h(l) = \frac{\pi}{4\bar{l}} \sin\left(\frac{\pi l}{2\bar{l}}\right) \quad 0 \leq \frac{l}{\bar{l}} \leq 2 \quad (4.131)$$

代入(4.129)式可以得到

$$\sigma_{cs} = \sigma_{fu} v_f \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\bar{l}}{2\pi l_c} \sin\left(\frac{\pi l_c}{2\bar{l}}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi l_c}{2\bar{l}}\right) - \frac{\pi l_c}{2\bar{l}} \left[\text{si}(\pi) - \text{si}\left(\frac{\pi l_c}{2\bar{l}}\right) \right] \right\} + \sigma'_{mu} (1 - v_f) \quad (4.132)$$

式中

$$\text{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (4.133)$$

这种情况下, 公式(4.109)中函数 $F(l_c/\bar{l})$ 变化曲线如图 4.33 所示, 虚线表示纤维长度为常量时的计算曲线。从图中可以看出, 将纤维当成随机分布的, 还是认为是等长的, 对结果影响不大。

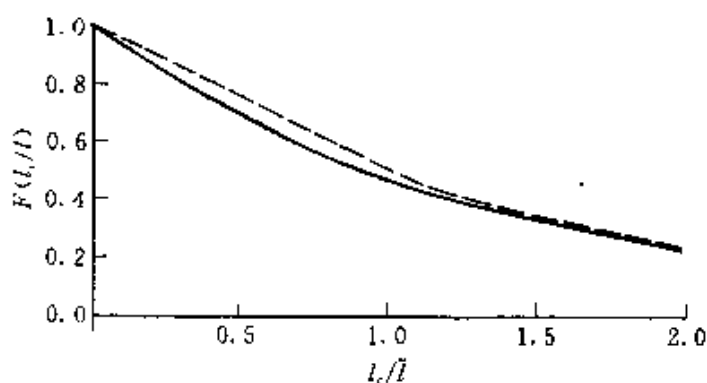


图 4.33 $F(l_c/\bar{l})$ 函数变化曲线^[4]

另外, 考察一下纤维长度不变而其方位是随机分布的情况对强度性能的影响, 如下为采用的二种纤维方位随机分布模型,

$$(1) g(\theta) = \frac{1}{\alpha}, 0 \leq \theta \leq \alpha, \text{ 且当 } \theta > \alpha \text{ 时, } g(\theta) = 0$$

$$(2) g(\theta) = \pi/2\alpha \cos(\pi\theta/2\alpha), 0 \leq \theta \leq \alpha, \text{ 且当 } \theta > \alpha \text{ 时, } g(\theta) = 0$$

根据这两种角度分布函数, 计算得到的纤维方位因子如下:

$$(1) \lim_{\beta \rightarrow 0} C_0 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{12} \sin 3\alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha \right) \quad (4.134)$$

$$\begin{aligned}
(2) \lim_{\beta \rightarrow 0} C_0 &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{1+q} \sin \frac{\pi}{2} (1+q) + \frac{1}{1-q} \sin \frac{\pi}{2} (1-q) \right] \\
&\times \left[\frac{3}{1+q} \sin \frac{\pi}{2} (1+q) + \frac{3}{1-q} \sin \frac{\pi}{2} (1-q) \right] \\
&+ \frac{1}{1+3q} \sin \frac{\pi}{2} (1+3q) + \frac{1}{1-3q} \sin \frac{\pi}{2} (1-3q) \Big]
\end{aligned}
\tag{4.135}$$

式中, $q = 2\alpha/\pi$, 其计算结果如图 4.34 所示。

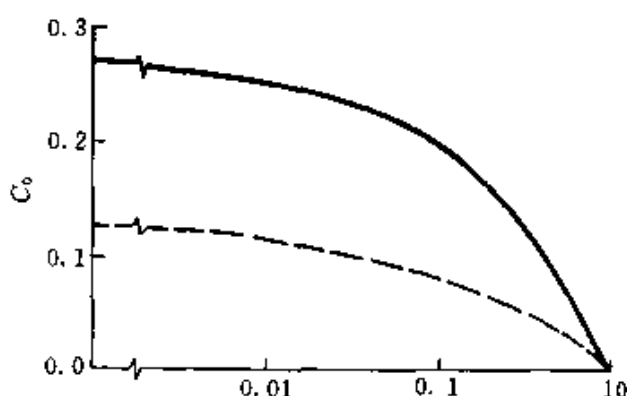


图 4.34 对应于二种方位分布函数 C_0 值^[4]

§ 4.4 方位完全随机短纤维复合材料强度问题

方位随机的短纤维增强复合材料在拉伸载荷的作用下, 既可能出现纤维的断裂, 又可能出现由于拉伸及剪切应力导致的基体及界面的破坏, 相应于不同的破坏机理, 其失效应力可以表示成

$$\sigma_c = \begin{cases} \sigma_1 = \sigma'_c / \cos^2 \theta & 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \sigma_2 = \tau_m / \sin \theta \cos \theta & \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \sigma_3 = \sigma_m / \sin^2 \theta & \theta_2 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases} \tag{4.136}$$

式中, σ'_c 为由混合律确定的单向复合材料沿纤维方向强度, τ_m 及 σ_m 分别为基体及界面的剪切及拉伸强度。随机短纤维复合材料的强度可对不同方向上复合材料承担的载荷的平均求得,

$$\sigma_{\text{cm}} = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\theta_1} \sigma_1 d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sigma_2 d\theta + \int_{\theta_2}^{\pi/2} \sigma_3 d\theta \right\} \quad (4.137)$$

实验表明,公式(4.137)预报的结果同玻璃纤维增强聚乙烯复合材料以及 Al_2O_3 铝硅复合材料的实验结果吻合得较好。

作为二维完全随机复合材料,其角度分布函数为

$$g(\theta) = \begin{cases} 2/\pi & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4.138)$$

因此,可以计算得到复合材料纤维方位因子为

$$C_0 = \frac{8}{3\pi^3} (2 + \beta^2)(1 - \beta^2)^{1/2} \left[\cos^{-1} \beta - \frac{1}{2} \beta \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \sqrt{1 - \beta^2}} \right) \right] \quad (4.139)$$

C_0 的计算结果如图 4.34 所示。

对于三维完全随机复合材料,其角度分布函数可表示成

$$g(\theta) = \sin \theta \quad (4.140)$$

因此,方位因子可求解为

$$C_0 = \frac{1}{8} (1 - \beta^2)(1 + \beta^2)(1 - \beta + \beta \ln \beta) \quad (4.141)$$

图 4.35 中也绘出了(4.141)式计算的结果。

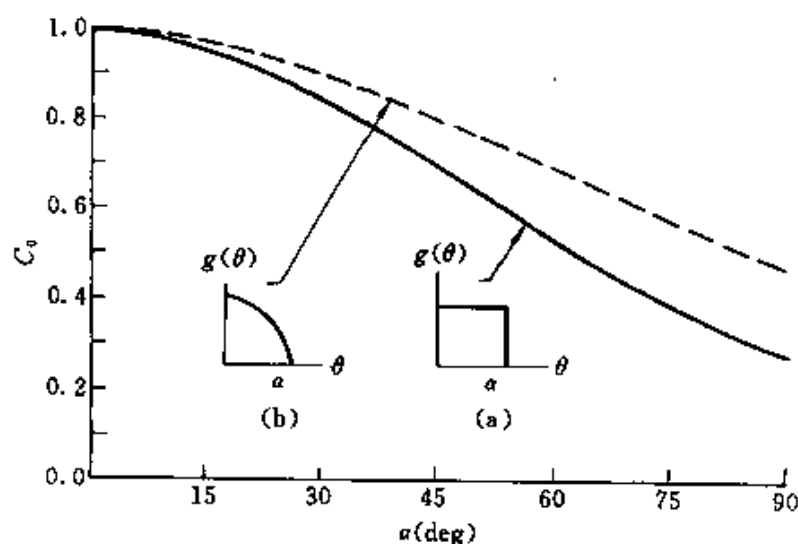


图 4.35 纤维随机排布的 C_0 曲线^[4]

近年来,由于掀起了研究金属基复合材料的高潮,晶须或颗粒增强复合材料的强度性能愈来愈受到了人们的重视,除了上述的基于纤维所承担的平均载荷建立的强度模型之外,人们还通过研究位错的运动以及增强相对位错的钉固作用来建立正确的强度预报模型,由于篇幅限制,这里将不详细介绍这些模型。值得注意的是,随着新材料的出现,其破坏机理也将与前面所述材料的破坏机理不同,因此建立模型所必须考虑的因素也不尽相同,预报结果与可靠的实验值相符的模型才是工程师所选择使用的唯一标准。

参 考 文 献

- [1] H. L. Cox, The elasticity and strength of paper and other fibrous materials, *Brit. J. Appl. Phys.*, 1952, 3.
- [2] H. Fukuda and K. Kawata, On the strength distribution of unidirectional fiber composites, *Fiber Sci. Tech.*, 1977, 10: 53.
- [3] H. Fukuda and T. W. Chou, A probabilistic theory for the strength of short-fiber composites, *J. Mat. Sci.*, 1981, 16: 1088.
- [4] H. Fukuda and T. W. Chou, A probabilistic theory for the strength of short-fiber composites and variable fiber length and orientation, *J. Mat. Sci.*, 1982, 17: 1003.
- [5] B. Burgel, A. J. Perry and W. R. Schneider, On the theory of fiber strengthening, *J. Mech. Phys. Solids*, 1970, 18: 101.
- [6] C. T. Chon and C. T. Sun, Stress discontinuous along a short fiber in fiber reinforced plastics, *J. Mat. Sci.*, 1980, 15: 931.
- [7] M. R. Piggott, Load-bearing fiber composites, Pergamon press, 1980.
- [8] A. Kelly and W. R. Tyson, Fiber-strengthened materials, *High Strength Materials* V. F. Zackay ed., J. Wiley and Sons, Inc., 1965: 578.
- [9] A. Kelly and W. R. Tyson, Tensile properties of fiber-reinforced metals; copper/Tungsten and Copper/Molybdenum, *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, 13: 329.
- [10] A. Kelly and G. J. Davies, The principles of the fiber reinforcement of metals, *Mat. Rev.*, 1965, 10(1).
- [11] A. Kelly, Strong Solids, 2nd ed., Clarendon press, Oxford, 1973.
- [12] A. Kelly, Reinforcement of Structural materials by long strong fibers, *Met. Trans.*, 1971, 3: 2313.
- [13] D. K. Hale and A. Kelly, Strength of fibrous composite materials, *Annual Review of Materials Science*, R. A. Huggins ed., Annual Review, Inc., Palo Alto, Califor-

nia, 1972.

- [14] W. H. Bowyer and M. G. Bader, On the reinforcement of thermoplastics by imperfectly aligned discontinuous fibers, *J. Mat. Sci.*, 1972, 7: 1315.
- [15] F. Hikami and T. W. Chou, A probabilistic theory for the strength of discontinuous fiber composites, *J. Mat. Sci.*, 1984, 19: 1805.
- [16] 顾震隆, 短纤维复合材料力学, 国防工业出版社, 1987 年.

第五章 纤维增强复合材料细观损伤及断裂模型

§ 5.1 复合材料细观损伤模型

由于复合材料加工工艺的限制,复合材料结构在受载之前往往就具有各种各样的初始缺陷及损伤。而且,在外加载荷远小于其极限载荷时,复合材料中基体可能会产生许多垂直于纤维方向的微裂纹,界面也可能发生脱胶,部分较弱的纤维也可能已经断裂。因此,可以不夸张地说,复合材料中的缺陷及损伤会伴随着材料的整个使用阶段。这样,为了对材料进行优化设计及正确地评价复合材料的性能,必须深入地研究材料的损伤破坏机理,进而揭示材料损伤演化规律并预报由于损伤的存在对材料的刚度、强度等宏观性能的影响。通过对复合材料损伤破坏机理的研究可以发现,许多先进复合材料具有优越于金属等传统材料性能的重要原因在于,它们具有优良的抗损伤及抗突发性破坏的能力。由于复合材料一般均是在含有缺陷及损伤的情况下工作的,自从先进复合材料广泛用于现代工程领域以来,人们就一直投入很大精力研究复合材料的损伤问题。尽管纤维增强复合材料的结构各种各样,在不同的载荷作用下,其损伤模式也五花八门,然而,基体开裂,界面脱胶及纤维断裂是复合材料最典型的损伤及破坏模式。在本节中,我们将主要讨论纤维增强复合材料层合板横向层开裂损伤模型,以及层间脱胶的细观力学模型。

§ 5.1.1 十字叠层的层合板横向层开裂模型

十字叠层指的是 $0^\circ, 90^\circ$ 单层相互交替的叠层。在外载作用下,纤维方向与外加载荷相互垂直的 90° 层往往会产生许多沿纤维方

向的横向裂纹,这样将导致整体复合材料的刚度下降及强度下降。人们已经进行了大量的工作用于揭示这类复合材料的损伤规律及预报由于这些缺陷的存在对材料刚度及强度性能的影响,例如, Parvizi, Garrett 及 Bailey^[1]; Parvizi 及 Bailey^[2]; Bailey, Curtis 及 Parvizi^[3]; Bader, Bailey, Curtis 及 Parvizi^[4]; Manders 等^[5]; Wang 及 Crossman^[6]; Crossman, Warren 及 Wang^[7]; Crossman 及 Wang^[8]; Wang^[9,10]; Laws 及 Dvorak^[11,12]; Dvorak, Laws 及 Hejazi^[13] 及 Dvorak 及 Laws^[14]。

考虑如图 5.1 所示正交对称铺设的三层复合材料层合板在单向拉伸载荷 σ_x 作用下,中间层中纤维方向与载荷方向相互垂直,习惯上称为 90° 层,其厚度为 $2d$ 。上、下两层中纤维方向与载荷方向相互平行,习惯上称为 0° 层,其厚度为 b 。在 σ_x 作用下,由于 90° 层主要由基体承担载荷,其断裂应变小于纤维的断裂应变,这样,这一横向层将首先垂直于拉伸载荷方向开裂。

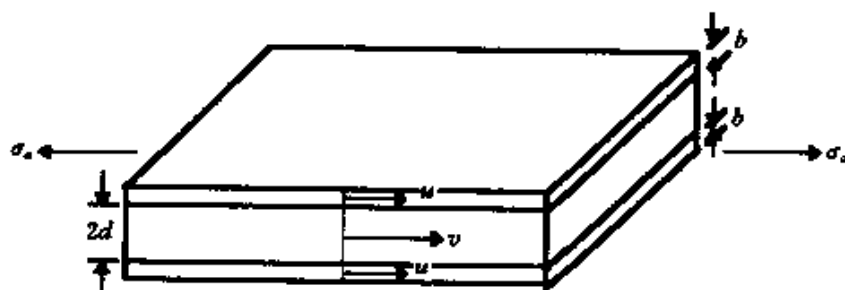


图 5.1 在单向拉伸载荷作用下的正交复合材料层合板

工程实际中迫切需要解决的问题是:(1) 90° 层在有多高拉伸载荷下产生开裂?(2)上、下两 0° 层如何约束中间 90° 间的开裂?(3) 90° 层中裂纹数目如何随外载增加而增加?(4)由于 90° 层的横向开裂,如何影响整体层合板的刚度及强度性能?(5)复合材料中的残余应力如何影响横向层的开裂行为等等。如下,我们将依据一基于剪滞法假设的力学模型为上述工程问题寻找一满意的答案。

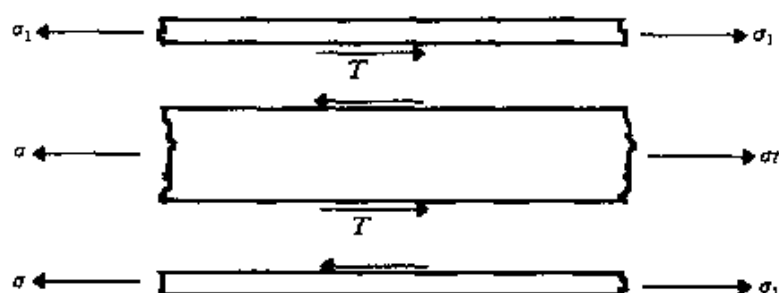


图 5.2 复合材料层合板中载荷分布

首先假设在加工过程中在 0° 及 90° 层中产生的残余应力为 σ_l^R, σ_t^R , 沿载荷方向 0° 层及 90° 层的位移分别为 $u(x)$ 及 $v(x)$, 这样 0° 层及 90° 层中相应的应变为

$$\epsilon_l = \frac{du}{dx}, \quad \epsilon_t = \frac{dv}{dx} \quad (5.1)$$

根据等应变假设, 复合材料横向开裂前, 沿载荷方向其杨氏模量为

$$E_0 = \frac{bE_l + dE_t}{b + d} \quad (5.2)$$

式中, E_l 及 E_t 分别为 0° 层及 90° 层沿载荷方向的拉伸模量。

当层合板在外部拉伸载荷作用下, 其各层中应力为残余应力及相应的外加载荷之和:

$$\sigma_t = \sigma_t^R + E_t \epsilon_t \quad (5.3)$$

$$\sigma_l = \sigma_l^R + E_l \epsilon_l \quad (5.4)$$

复合材料沿载荷方向平衡条件为

$$b\sigma_l + d\sigma_t = (b + d)\sigma_0 \quad (5.5)$$

由于残余应力为自平衡应力, 因此,

$$b\sigma_l^R + d\sigma_t^R = 0 \quad (5.6)$$

令 τ 为两层之间界面剪应力, 根据剪滞法假设可以建立 0° 层及 90° 的平衡方程为

$$\tau = -b \frac{d\sigma_l}{dx} = d \frac{d\sigma_t}{dx} \quad (5.7)$$

如果假设二层之间不产生滑移,其剪切应力应同 0° 层及 90° 层之间的相对位移成正比,即

$$\tau = k(v - u) \quad (5.8)$$

式中, k 为相当于剪切模量的材料常数。对(5.7)式求微分并利用(5.1), (5.3), (5.4)及(5.8)式可以得到

$$\frac{d^2\sigma_t}{dx^2} - \frac{\xi^2}{d^2}\sigma_t = -\frac{\xi^2}{d^2}(\sigma_t^R + \frac{E_t}{E_0}\sigma_a) \quad (5.9)$$

式中,无量纲剪滞因子 ξ 由下式确定

$$\xi^2 = \frac{kd(bE_t + dE_t)}{bE_tE_t} \quad (5.10)$$

方程(5.9)式的通解为

$$\sigma_t = \sigma_t^R + \frac{E_t}{E_0}\sigma_a + c_1e^{-\frac{\xi x}{d}} + c_2e^{\frac{\xi x}{d}} \quad (5.11)$$

当 90° 层中间有一微裂纹时(图 5.3),其边界条件为

$$\begin{cases} x = 0 \text{ 时, } \sigma_t = 0 \\ x = \infty \text{ 时, } \sigma_t = \sigma_t^R + \frac{E_t}{E_0}\sigma_a \end{cases} \quad (5.12)$$

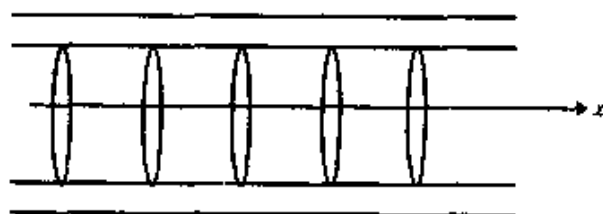


图 5.3 90° 层中微裂纹

利用(5.12)式可以确定(5.11)式中的常数为

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_1 &= -(\sigma_t^R + \frac{E_t}{E_0}\sigma_a) \end{aligned} \quad (5.13)$$

因此, 90° 层中应力分布为

$$\sigma_t = (\sigma_t^R + \frac{E_t}{E_0}\sigma_a)(1 - e^{-\frac{\xi x}{d}}) \quad (5.14)$$

0°层中应力分布为

$$\sigma_l = \frac{d}{b}(\sigma_l^R + \frac{E_l}{E_0}\sigma_a)e^{-\frac{\xi x}{d}} + \frac{E_l}{E_0}\sigma_a + \sigma_l^R \quad (5.15)$$

考察如图 5.4 所示二个横向裂纹之间的区域 AB, 其边界条件为

$$\sigma_l = 0 \quad \text{当 } x = \pm h \quad (5.16)$$

联立求解(5.11)及(5.16)式可以得到 90°层中沿载荷方向应力分布为

$$\sigma_l = (\sigma_l^R + \frac{E_l}{E_0}\sigma_a) \left[1 - \frac{\cosh \frac{\xi x}{d}}{\cosh \frac{\xi h}{d}} \right] \quad (5.17)$$

利用(5.7)式也可以得到 0°层中应力分布为

$$\sigma_l = \frac{E_l}{E_0}\sigma_a \left[1 + \frac{dE_l}{bE_l} \cdot \frac{\cosh \frac{\xi x}{d}}{\cosh \frac{\xi h}{d}} \right] + \sigma_l^R \left[1 - \frac{\cosh \frac{\xi x}{d}}{\cosh \frac{\xi h}{d}} \right] \quad (5.18)$$

同样可以导出 0°层及 90°层中位移场为

$$u = \frac{\sigma_a}{E_0}x + \frac{d^2}{\xi E_l b}(\sigma_l^R + \frac{E_l}{E_0}\sigma_a) \frac{\sinh \frac{\xi x}{d}}{\cosh \frac{\xi h}{d}} + c_1 \quad (5.19)$$

$$v = \frac{\sigma_a}{E_0}x - \frac{d}{\xi E_l}(\sigma_l^R + \frac{E_l}{E_0}\sigma_a) \frac{\sinh \frac{\xi x}{d}}{\cosh \frac{\xi h}{d}} + c_2 \quad (5.20)$$

式中, c_1, c_2 为待定常数。

下面考察由于 90°层中横向裂纹的存在而导致层合板刚度的下降。令任意两个横向裂纹之间的平均距离为 $2h$ (图 5.4), 那么 AB 段的平均应变也即是层合板的平均应变, 可以求得

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \frac{u(B) - u(A)}{2h} \\ &= \frac{\sigma_a}{E_0} \left\{ 1 + \frac{d^2 E_l}{\xi h b E_l} \tanh \frac{\xi h}{d} \right\} + \frac{d^2 \sigma_l^R}{\xi b h E_l} \tanh \frac{\xi h}{d} \end{aligned} \quad (5.21)$$

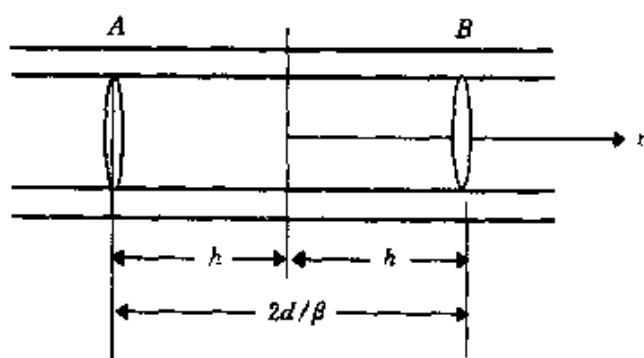


图 5.4 90°层中两个相邻的横向裂纹

在导出(5.16)式时,我们利用了(5.14)式。引入如下参数

$$\beta = d/h \quad (5.22)$$

可以得到含横向裂纹的复合材料层合板拉伸应力-应变关系,

$$\sigma_a = E_0 \left\{ \epsilon_a - \frac{\beta}{\xi} \cdot \frac{d\sigma_t^R}{bE_t} \tanh \frac{\xi}{\beta} \right\} \left\{ 1 + \frac{\beta}{\xi} \cdot \frac{dE_t}{bE_t} \tanh \frac{\xi}{\beta} \right\}^{-1} \quad (5.23)$$

从(5.21)式中可以发现,当外部载荷 $\sigma_a=0$ 时,复合材料层合板仍存在有一初始应变 ϵ_p ,

$$\epsilon_p = \frac{\beta}{\xi} \cdot \frac{d\sigma_t^R}{bE_t} \tanh \frac{\xi}{\beta} \quad (5.24)$$

这样,外加载荷与复合材料宏观应变之间的关系——有效弹性模量可以得到为

$$E(\beta) = E_0 \left\{ 1 + \frac{\beta}{\xi} \cdot \frac{dE_t}{bE_t} \tanh \frac{\xi}{\beta} \right\}^{-1} \quad (5.25)$$

当裂纹数目很小,即 $\beta \rightarrow 0$ 时,很显然 $E \rightarrow E_0$ 。然而当裂纹数目很大 $\beta \rightarrow \infty$ 时,可以导出

$$E \rightarrow E_0 \left(1 + \frac{dE_t}{bE_t} \right)^{-1} = \frac{bE_t}{b+d} \quad (5.26)$$

式(5.26)相当于 90°层不起任何作用的情况。

通过计算表明,对于实际材料 $0 \leq \xi \leq 2.5$, 这种情况下, $\epsilon_p \approx 5\% \epsilon_a$, 因此 ϵ_p 的影响相当小,甚至是可以忽略的。

到现在为止,我们仅仅研究了由于横向裂纹的存在对层合板

中应力场的分布及其刚度性能的影响,还没有考虑最关键的一个问题,即横向裂纹在什么条件下会出现?目前针对这一问题的研究主要集中在二方面的准则,一是应变或应力准则,二是能量准则,下面将分别考察二方面准则所预报的结果。

(1) 应力准则

这一准则的核心在于,外加载荷增加时,当 90° 层中载荷或应变达到某一临界值 σ_m 或 ε_m 时, 90° 层中即会产生一横向裂纹。这一裂纹产生后,横向层中拉伸应力由式(5.14)确定,由裂纹面处的 0 逐渐增加,当外加载荷进一步增加将导致更多的微裂纹产生。实验证明,当 90° 层厚度较大时,上下两 0° 层对 90° 层开裂限制不大,这样应力准则得到的结果是比较好的。然而,当 90° 层厚度较小,周围 0° 层对 90° 层开裂约束很大,甚至可能当应变增至足以使 0° 层纤维断裂时, 90° 层仍然不产生横向开裂,这种情况下,采用能量准则是比较合适的。

下面我们来考察,利用应力准则,随外载增加,横向裂纹周期增长的损伤演化过程。设复合材料层合板试件长度为 $2a$,并假定第一个横向裂纹产生在试件中点,其第一个裂纹产生的条件为 $\sigma_c = E_0 \varepsilon_m$,这里采用了初始时,各层应变相等的假设,这一裂纹出现后,横向层中应力分布由(5.14)式决定,可以发现,横向层中最大应力出现在试件两端 $x = \pm a$ 处,当外加载荷增至 σ_a^1 时,其中

$$\sigma_a^1 = \frac{E_0}{E_t} [\sigma_m (1 - e^{-\frac{\xi a}{d}})^{-1} - \sigma_t^R] \quad (5.27)$$

将在试件的两端各产生一微裂纹,式中, σ_m 为横向层开裂的临界载荷。

当载荷进一步增加达到临界值 σ_a^2 时,其中 σ_a^2 可由(5.17)式决定

$$\sigma_a^2 = \frac{E_0}{E_t} \left[\sigma_m \left[1 - \frac{\cosh \frac{\xi a}{2d}}{\cosh \frac{\xi h}{d}} \right]^{-1} - \sigma_t^R \right] \quad (5.28)$$

将在已经开裂的三个裂纹的中间产生另外一对裂纹,此时,裂纹之

间的距离为 $a/2$ 。

当外加载荷增加时,将有新的微裂纹继续产生,这种损伤演化将一直持续到 0° 层的载荷达到其临界强度值而导致复合材料的层合板的破坏。

(2) 能量准则

当 90° 层厚度较小时,其上、下两侧的 0° 层将约束 90° 层的横向开裂,这种情况下采用能量方法可以得到比较合理的结论,能量方法的核心在于,由于横向裂纹的存在而释放的总的弹性能大于及等于产生新的裂纹表面及产生滑移等阻力能时,该横向裂纹的出现成为可能。其关系式可以表示成

$$\Delta F = U_c \quad (5.29)$$

式中, ΔF 为由于横向裂纹的存在而产生的弹性势能的降低,它等于在产生微裂纹过程中外力所作的功减去应变能的变化。 U_c 为微裂纹开裂的阻力能,如果认为两层之间界面结合完好,则 U_c 即等于裂纹的表能。

当层合板在外加拉伸载荷 σ_a 作用下, 90° 层出现一横向微裂纹时,两 0° 层中应力场产生变化 $\Delta\sigma$,而导致复合材料层合板产生一附加位移 δa ,外力 σ_a 在 δa 上所作的功可以容易地求得如下:

$$\Delta\sigma = \frac{d}{b} \left(\sigma_i^R + \frac{E_i}{E_0} \sigma_a \right) e^{-\frac{\xi x}{d}} \quad (5.30)$$

$\Delta\sigma$ 在长度为 $2a$ 的 0° 层中产生的位移为

$$\begin{aligned} \delta a &= 2 \int_0^a \frac{\Delta\sigma}{E_i} dx \\ &= \frac{2d^2}{b\xi E_i} \left(\sigma_i^R + \frac{E_i}{E_0} \sigma_a \right) (1 - e^{-\frac{\xi a}{d}}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

当 $a/h \gg 1$ 时, (5.31) 式成为

$$\delta a = \frac{2d^2}{b\xi E_i} \left(\sigma_i^R + \frac{E_i}{E_0} \sigma_a \right) \quad (5.32)$$

因此,由于微裂纹的存在,外力所作的附加功为

$$\Delta W = \sigma_a \delta a$$

$$= \frac{2\sigma_a d^2}{b\xi E_t} (\sigma_t^R + \frac{E_t}{E_0} \sigma_a) \quad (5.33)$$

对于线弹性变形问题,由于微裂纹的出现,弹性应变能的增加是外力功 ΔW 的一半,因此,依据能量准则得到的 90° 层中出现第一个横向裂纹的条件为

$$\frac{\sigma_a d^2}{b\xi E_t} (\sigma_t^R + \frac{E_t}{E_0} \sigma_a) = 2\gamma_c \frac{d}{d+b} \quad (5.34)$$

式中, γ_c 为 90° 层横向微裂纹的表面能密度,可以视为一材料常数。通过求解(5.34)式可以得到第一个横向裂纹产生所需要的临界外加载荷 σ_a

$$\sigma_a = \frac{E_c}{2E_t} \times \frac{\sqrt{b\xi E_t}}{d} \times \sqrt{\frac{(\sigma_t^R d)^2}{b\xi E_t} + \frac{8\gamma_c E_t d}{E_0(d+b)}} - \frac{1}{2} \times \frac{E_0}{E_t} \sigma_t^R \quad (5.35)$$

由(5.35)式计算得到第一个横向裂纹出现的临界应变随 90° 层厚度 d 变化曲线如图 5.5 所示,图中也绘出了玻璃纤维增强环氧复

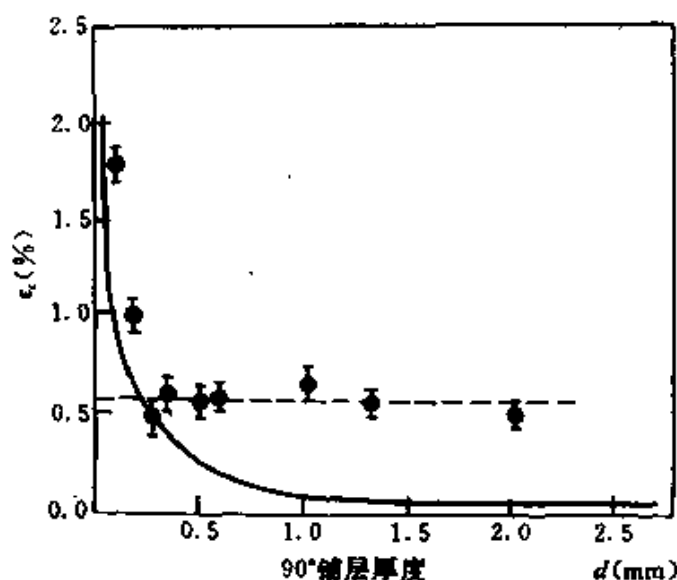


图 5.5 横向开裂应变随单层厚度变化曲线^[15]

合材料层合板的实验结果。从图中可以发现,当 90° 层厚度 $d < 0.25\text{mm}$ 时,理论预报值同实验结果吻合极好,表明能量准则是很

适用的。然而,当 90° 层厚度较大时,能量准则预报的结果不正确, 90° 层中横向裂纹的出现条件为外加应变近似等于一常值 0.5,这也近似等于 90° 层的开裂应变。能量法不适用的原因可能在于厚度较大时,利用剪滞法计算得到的能量关系式误差极大。因此,为了避免横向开裂,可以减少每一单层的厚度。

为了研究裂纹密度如何随外载的增加而增加,首先考虑如图 5.6 所示的问题。 A 及 B 点的横向裂纹已经存在的条件下,当外载增至一临界值时,在 A, B 两裂纹之间某点 C 处将萌生又一个横向裂纹,下面我们将基于能量法导出 C 处裂纹萌生的临界条件。令仅有 A, B 两横向裂纹时,其状态为 1。 0° 层及 90° 层中位移场分别为 u_1, v_1 。当 C 处裂纹产生后,其状态为 2, 0° 层及 90° 层中位移场分别为 u_2, v_2 。

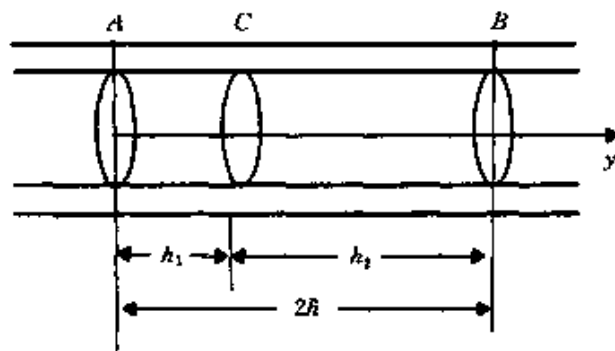


图 5.6 在两个横向裂纹中间随机出现的第三个裂纹

对于状态 1,其 AB 段中的弹性应变能等于外力由 0 增至 σ_a 时对系统所作的功,可表示成

$$\begin{aligned} W_1 &= b[(\sigma_t + \sigma_t^R)u_1]_A^B + d[(\sigma_t + \sigma_t^R)v_1]_A^B \\ &= \{(b + d)\sigma_a + b\sigma_t^R\}[u_1]_A^B + d\sigma_t^R[v_1]_A^B \end{aligned} \quad (5.36)$$

式中

$$[\]_A^B = [\]_B - [\]_A \quad (5.37)$$

在导出(5.36)式时,我们利用了条件 $\sigma_t(A) = \sigma_t(B) = 0$ 。

同理对于状态 2,其 AB 段中的弹性应变能为

$$W_2 = \{(b + d)\sigma_a + b\sigma_t^R\}\{[u_2]_A^C + [u_2]_C^B\} + d\sigma_t^R\{[v_2]_A^C + [v_2]_C^B\}$$

$$= \{(b+d)\sigma_a + b\sigma_i^R\}[u_2]_A^B + d\sigma_i^R\{[v_2]_A^C + [v_2]_C^B\} \quad (5.38)$$

在导出(5.38)式时,我们利用了 u_2 在 C 处连续的事实。

想象外载固定,当 C 处裂纹出现后,外载对 AB 段所作的功为

$$2b[\sigma_i(u_2 - u_1)]_A^B = 2(b+d)\sigma_a[u_2 - u_1]_A^B \quad (5.39)$$

因此,由于 C 处微裂纹的出现而导致的系统总的能量降低等于外力所作的功减去应变能的增加,可以表示成

$$\begin{aligned} \Delta F &= 2(b+d)\sigma_a[u_2 - u_1]_A^B - (w_2 - w_1) \\ &= \{(b+d)\sigma_a + d\sigma_i^R\}[u_2 - u_1]_A^B + d\sigma_i^R[v_1 - v_2]_A^C \\ &\quad + d\sigma_i^R[v_1 - v_2]_C^B \end{aligned} \quad (5.40)$$

将前文所求得的位移公式(5.19)及(5.20)式代入(5.40)式中,经过复杂的数学推导可以得到由于 C 处微裂纹的萌生而释放的应变能为

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{2d^2(b+d)E_0}{\xi b E_i E_t} (\sigma_i^R + \frac{E_t}{E_0} \sigma_a)^2 \left\{ \tanh \frac{\xi h_1}{2d} \right. \\ &\quad \left. + \tanh \frac{\xi h_2}{2d} - \tanh \frac{\xi h}{d} \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

能量准则可以表示成

$$\Delta F = 2d\gamma_c \quad (5.42)$$

当 $h \gg d, h_1 \gg d, h_2 \gg d$ 时,通过(5.42)式我们可以求得 C 处萌生裂纹的临界载荷

$$\sigma_a = \left\{ \frac{\xi b E_i E_0 \gamma_c}{d(b+d)E_t} \right\}^{1/2} - \frac{E_0}{E_t} \sigma_i^R \quad (5.43)$$

下而假设在外载作用下,复合材料层合板 90° 层中含有平均间距为 $2h$ 的周期横向裂纹,这样其密度为 $\beta = d/h$ 。由于材料性能的随机性,当载荷继续增加时, AB 段中又一微裂纹出现的位置为一随机变量,设微裂纹出现在 C 处(图 5.6),这时需要的宏观拉伸载荷由能量准则(5.43)式确定为

$$\sigma_a(h_1) = \left(\sigma_a + \frac{E_0}{E_t} \sigma_i^R \right) \left\{ \tanh \frac{\xi h_1}{2d} + \tanh \frac{\xi h_2}{2d} - \tanh \frac{\xi h}{d} \right\}^{-1/2} - \frac{E_0}{E_t} \sigma_i^R \quad (5.44)$$

令 $p(y)$ 为微裂纹出现位置的概率密度函数,则导致这一微裂纹出

现外力场的均值为

$$\langle \sigma_a \rangle = \int_0^{2h} p(y) \sigma_a(y) dy \quad (5.45)$$

下面考察位置分布函数 $p(y)$ 的三种情况:

(1) 裂纹出现在 AB 段的中间, 则

$$p(y) = \delta(y - h) \quad (5.46)$$

式中, $\delta(y)$ 为狄拉克函数。这种情况下, 平均临界载荷为

$$\langle \sigma_a \rangle = (\sigma_a^R + \frac{E_0}{E_t} \sigma_t^R) \{ 2 \tanh \frac{\xi}{2\beta} - \tanh \frac{\xi}{\beta} \}^{-1/2} - \frac{E_0}{E_t} \sigma_t^R \quad (5.47)$$

(2) 裂纹在 AB 段完全随机分布

$$p(y) = 1/2h \quad (5.48)$$

(3) 裂纹在 AB 段各点出现的概率与该点的拉伸应力成正比, 概率密度函数为

$$p(y) = \frac{1}{2h} \left[1 - \frac{\cosh \frac{\xi(y-h)}{d}}{\cosh \frac{\xi h}{d}} \right] \left[1 - \frac{\tanh \frac{\xi h}{d}}{\frac{\xi h}{d}} \right]^{-1} \quad (5.49)$$

相应于(5.48)式及(5.49)式两种概率密度函数, 可利用数值积分求得平均开裂应力

下面将利用三种材料的实验结果来检验上述理论模型预报的结果。

(1) 玻璃纤维/环氧树脂复合材料层合板(0, 90)°, 其材料性能为

$$E_l = 41.7 \text{ GPa}, \quad E_t = 13.0 \text{ GPa}$$

$$\sigma_t^R = 8.4 \text{ MPa}, \quad \sigma_a^R = 55 \text{ MPa}$$

$$G_c = 193 \text{ Jm}^{-2}$$

由此可以得到剪滞参数 $\xi = 0.9$, 图 5.7 绘出了材料刚度随裂纹密度变化曲线。图 5.8 绘出三种不同概率密度函数对应的裂纹密度与外载之间关系曲线。图 5.9 绘出相应于不同的 90° 层开裂阻力 G_c 与裂纹密度变化曲线。

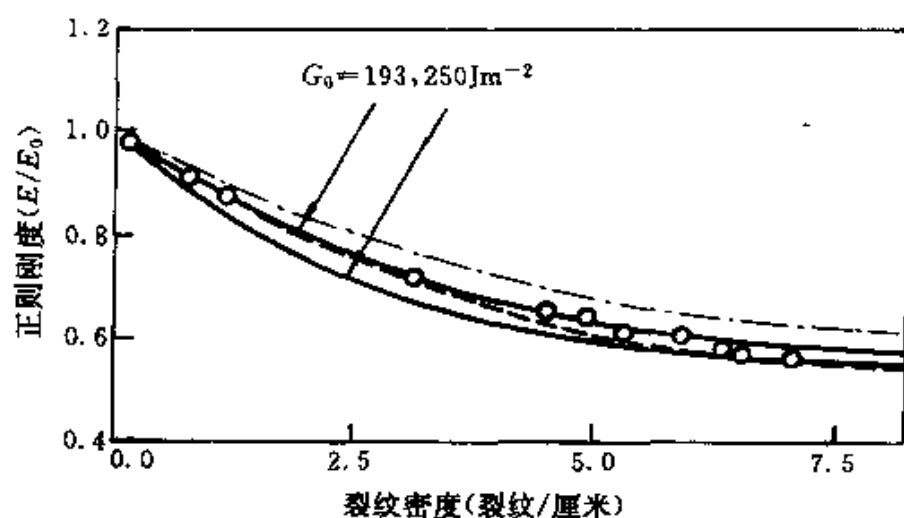


图 5.7 层合板刚度随裂纹密度变化曲线^[11]

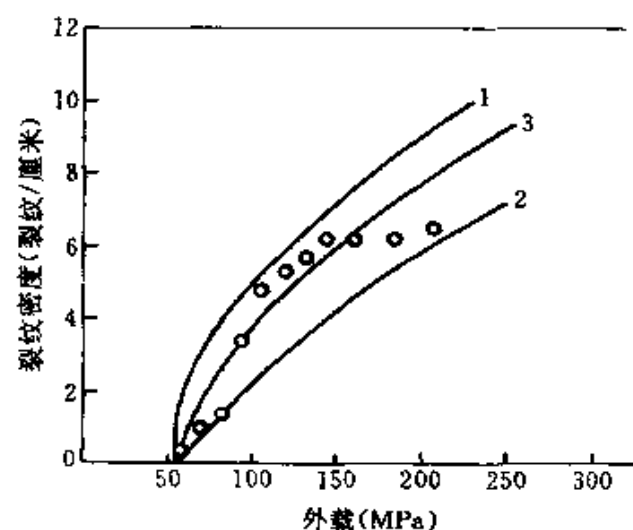


图 5.8 不同裂纹位置分布下,裂纹密度随外载变化曲线^[11]

(2) 三类碳/环氧复合材料层合板 $(0_2, 90)_s$, $(0_2, 90_2)_s$, $(0_2, 90_3)_s$, 剪滞参数分别为

$$(0_2, 90)_s, \quad \xi = 0.93$$

$$(0_2, 90_2)_s, \quad \xi = 1.38$$

$$(0_2, 90_3)_s, \quad \xi = 2.24$$

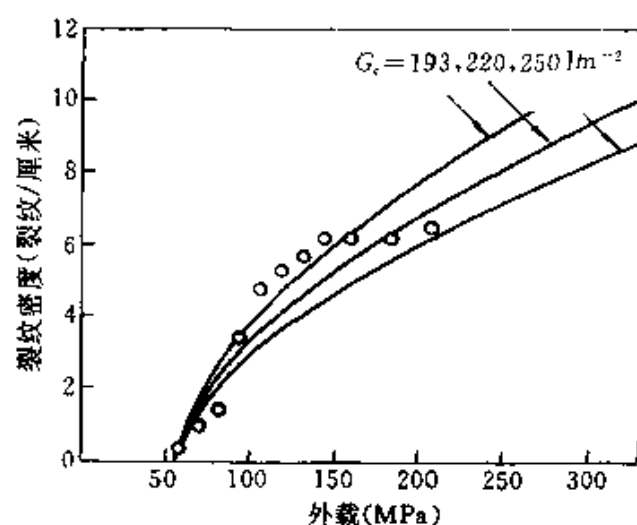


图 5.9 不同断裂韧性条件下, 裂纹密度随外载变化曲线^[11]

模型预报的结果与实验值比较如图 5.10 所示。

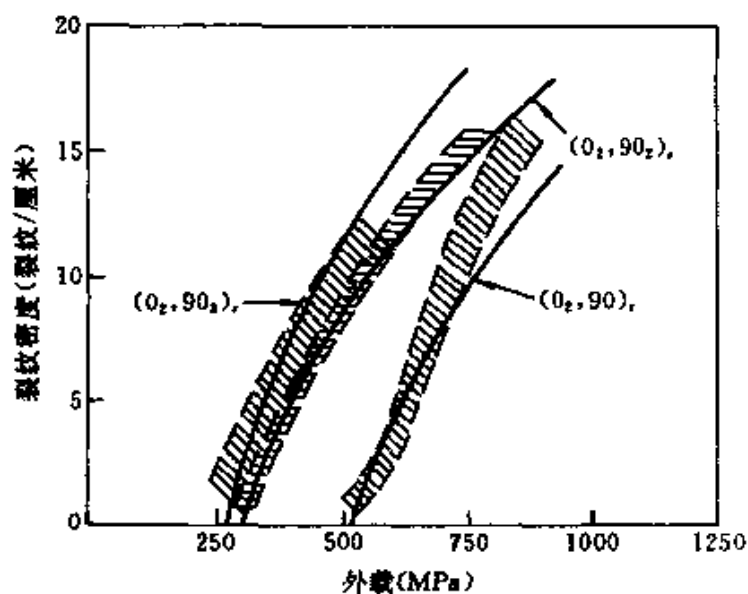


图 5.10 三类碳/环氧复合材料层合板裂纹密度随外载变化理论及实验曲线

(3) 三种 T300/934 复合材料层合板, 其材料常数为

$$(0, 90_2, 0), \quad \xi = 1.08$$

$$(0,90_3,0), \quad \xi=1.70$$

$$(0,90_4,0), \quad \xi=1.79$$

其理论预报曲线同实验值如图 5.11 所示。

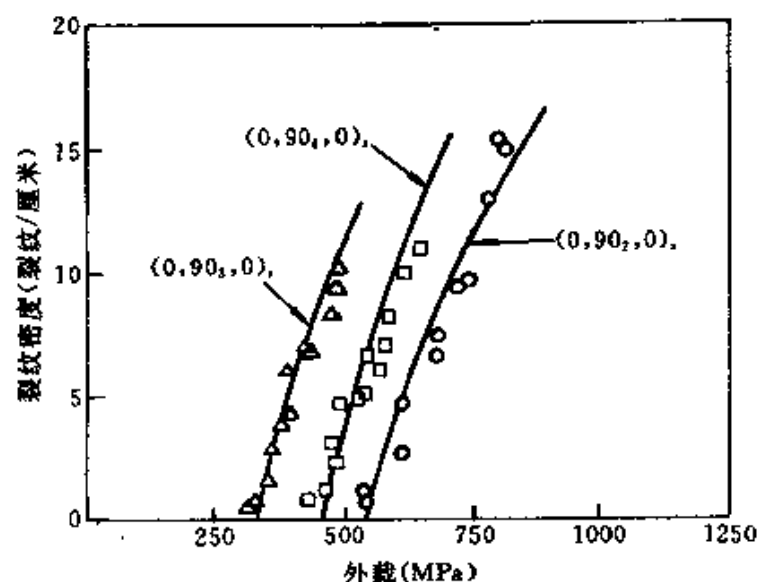


图 5.11 三种 T300/934 复合材料层合板裂纹密度随外载变化理论及实验曲线

从上面三种材料的实验结果验证结果表明,理论模型尽管基于剪滞法这样简单的假设,但预报结果还是相当可靠的,最近,一直还有许多文章利用解析及数值方法预报复合材料的刚度降低及横向开裂。

§ 5.1.2 复合材料层合板的脱层损伤

由具有各向异性性能的单向纤维增强复合材料单层沿不同方向铺设面成的复合材料层合板在外载作用下另一种典型的损伤破坏方式是不同的两层之间产生脱层,而由于层间脱胶将导致复合材料层合板的刚度及强度性能大大地降低。针对这一工程实际问题,人们利用解析方法及有限元等数值方法详尽研究了复合材料层合板中的层间应力用于解释脱层的原因。并利用线弹性断裂力学中的应变能释放率准则预报了层间脱层的损伤演化规律及减少脱层损伤的复合材料铺层角度、顺序等结构优化设计方法。一些典

型的工作包括: Pagano 及 Pipes [16, 17, 18]。

在本节中, 我们将首先讨论复合材料层合板中层间应力的分布。然后, 为了确定复合材料层合板脱层失稳扩展准则, 将详尽讨论层合板中脱层应变能释放率计算公式。最后, 对脱层的一般问题进行讨论。在复合材料层合板破坏过程中, 其脱层损伤往往与横向开裂相互耦合, 使得建模工作十分复杂。在本节中, 我们将不考虑这种耦合, 而只研究复合材料的脱层损伤问题。

1. 复合材料层合板中的层间应力

考虑一复合材料对称层合板在沿 x 方向单向拉伸载荷作用下(图 5.12), 实验中发现, 在自由边处的层与层之间往往会产生

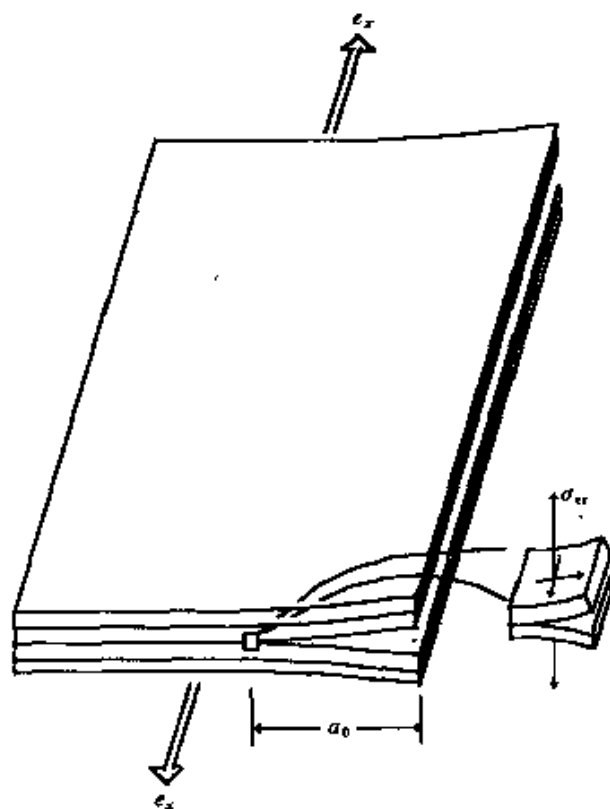


图 5.12 在拉伸载荷作用下, 复合材料边缘脱层模型

如图所示的脱胶。在经典层合板理论中, 仅考虑各层的面内应力 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$, 而不考虑层间应力 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ 。下面我们将给出一个例子来说明经典层合理论不能解释脱层这一事实。

研究一种用正交各向异性层对称于中面排列的角铺设层合板

(如图 5.13 所示)。这种层合板具有偶数层数,而且内部铺层有相同的定向,这是一种不规则的对称角铺设层合板。由于对称性,弯曲和拉伸之间没有耦合影响,即当层合板承受沿 x 方向的拉伸载荷 N_x 时,层合板不会产生弯曲变形。在各层与材料主轴一致的坐标系中,其应力-应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_1^0 \\ \epsilon_2^0 \\ \gamma_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

式中,角标 k 表示第 k 层。

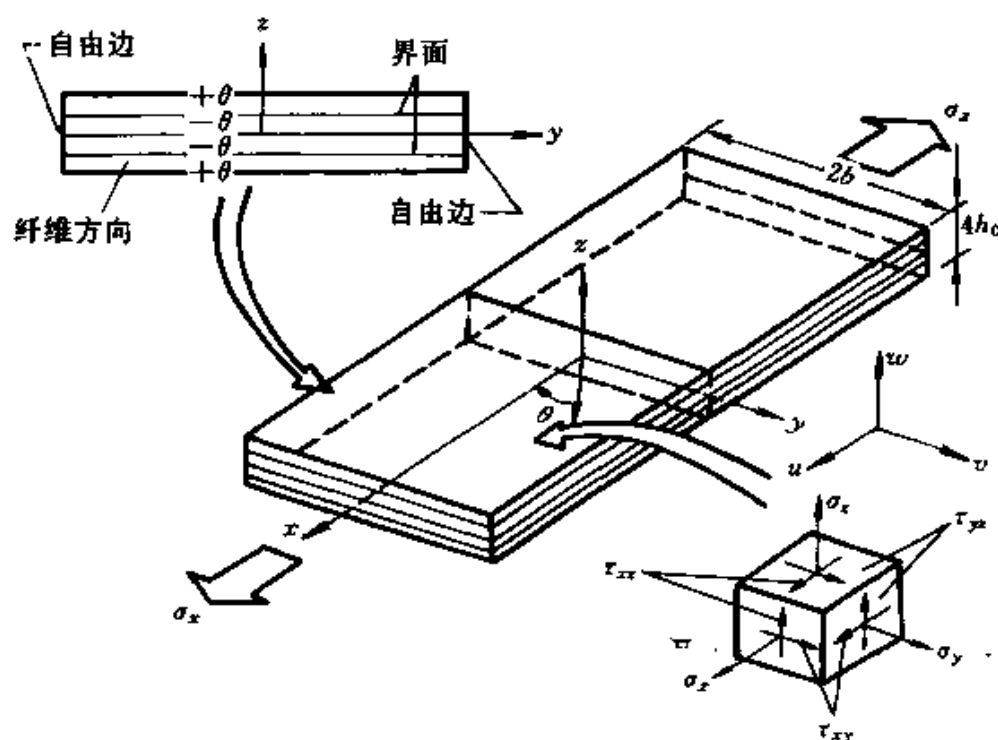


图 5.13 层合板几何形状和应力

利用坐标变换,(5.50)式在层合板整体坐标系中的形式为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

于是,层合板的拉伸刚度为

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (5.52)$$

式中, N 为层合板中所含单层的数目。其应力-应变关系可以写成

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

通过(5.53)式可以得到层合板的应变为

$$\epsilon_x^0 = \frac{A_{11}N_x}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \epsilon_y^0 = \frac{-A_{12}N_x}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad (5.54)$$

其中, $\gamma_{xy}^0 = 0$, 然而, 在每一单层内剪应变并不为 0, 其表达式为

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \cos^2\theta - (\frac{A_{12}}{A_{22}})\sin^2\theta \\ \sin^2\theta - (\frac{A_{12}}{A_{22}})\cos^2\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta[1 + \frac{A_{12}}{A_{22}}] \end{Bmatrix}_k \cdot \frac{A_{22}N_x}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \quad (5.55)$$

层合板层与层之间传递剪应力机理如图 5.14 所示, 由于在自由边上 $\tau_{xy} = 0$, 这样, 该层中由 τ_{xy} 产生的力偶只能由与其相邻的界面剪切应力 τ_{xz} 平衡, 这样, 在自由边附近 τ_{xz} 不可能为 0。下面将采用准三维的方法求解界面应力。

对于各正交各向异性层在材料主方向上三维应力-应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (5.56)$$

在 1-2 平面内进行坐标交换, 可以得到在层合板整体坐标系中表

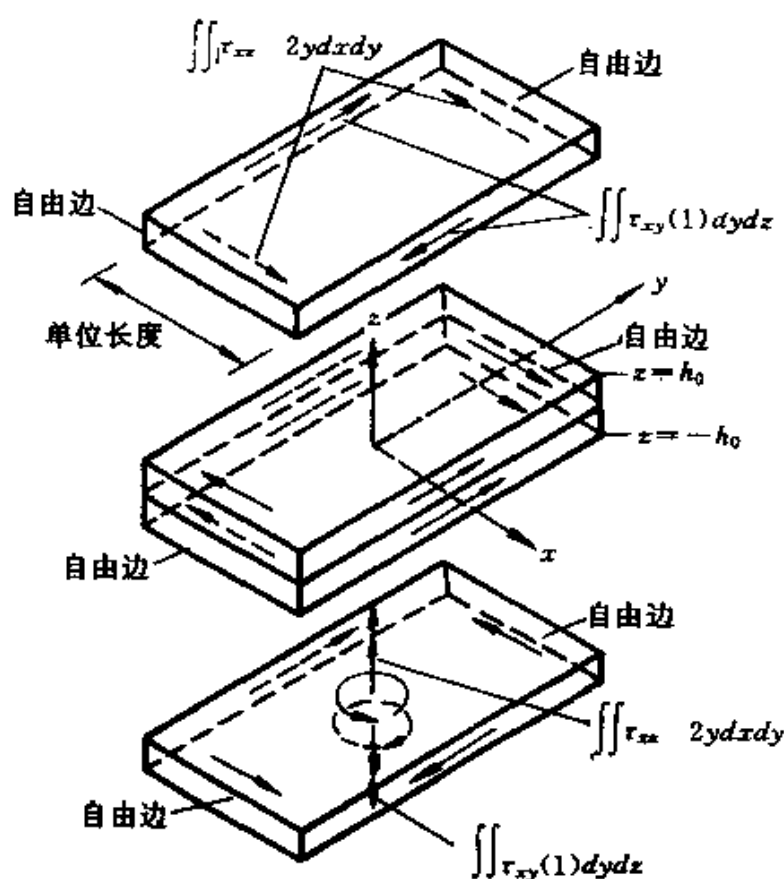


图 5.14 层间剪应力机构

达式为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & \bar{C}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} & 0 \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{36} & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.57)$$

应力-位移关系式为

$$\epsilon_x = u_{,x}, \epsilon_y = v_{,y}, \epsilon_z = w_{,z} \quad (5.58)$$

$$\gamma_{yz} = v_{,z} + w_{,y}, \gamma_{zx} = w_{,x} + u_{,z}, \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (5.59)$$

式中, u, v, w 分别为 x, y, z 方向上位移, “,” 表示对下标的偏微

分。

对于对称层合板在 x 方向承受均匀拉伸力时,位移场可以表示成

$$\begin{aligned} u &= \epsilon_x^0 x + U(y, z) \\ v &= V(y, z) \\ w &= W(y, z) \end{aligned} \quad (5.60)$$

式中, ϵ_x^0 表示沿 x 方向均匀外加应变。对于任一层其应力平衡方程可表示成

$$\begin{aligned} \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= 0 \\ \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} &= 0 \\ \tau_{yx,y} + \tau_{zx,z} &= 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

将位移场(5.60)式代入(5.58)式中,并一同代入(5.57)式中,然后通过平衡方程可以得到

$$\begin{aligned} \bar{C}_{66}U_{,yy} + \bar{C}_{55}U_{,zz} + \bar{C}_{26}V_{,yy} + \bar{C}_{45}V_{,zz} + (\bar{C}_{36} + \bar{C}_{45})W_{,yz} &= 0 \\ \bar{C}_{26}U_{,yy} + \bar{C}_{45}U_{,zz} + \bar{C}_{22}V_{,yy} + \bar{C}_{44}V_{,zz} + (\bar{C}_{23} + \bar{C}_{44})W_{,yz} &= 0 \\ (\bar{C}_{45} + \bar{C}_{36})U_{,yz} + (\bar{C}_{44} + \bar{C}_{23})V_{,yz} + \bar{C}_{44}W_{,yy} + \bar{C}_{33}W_{,zz} &= 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

这些联立的二阶偏微分方程得不到封闭解,因此,必须使用有限差分等近似数值方法求解,值得注意的是,方程(5.62)式中的系数沿 z 向是分段连续的函数。对于对称层合板,考虑的区域可以简化为研究层合板的 yz 截面(x 为任意值)的四分之一,如图 5.15 所示。图中,在上表面

$$\tau_{yz} = 0, \sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0 \quad (5.63)$$

在外部边界上

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0, \tau_{yx} = 0 \quad (5.64)$$

在中面 $z=0$, U 和 V 对称,而 W 反对称,即

$$\begin{aligned} U_{,z}(y, 0) &= 0 \\ V_{,z}(y, 0) &= 0 \\ W(y, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

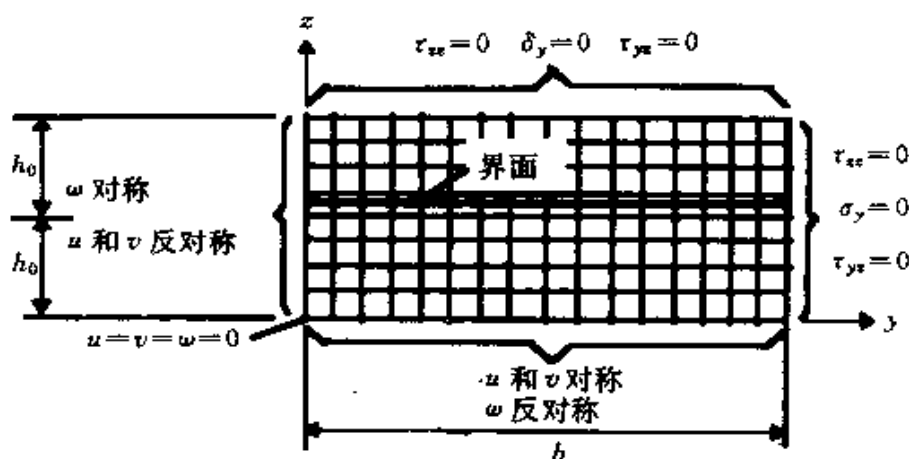


图 5.15 有限差分表示法和边界条件

而且在 $y=0$ 时, U 和 V 反对称, 而 W 对称, 即

$$\begin{aligned} U(0, z) &= 0 \\ V(0, z) &= 0 \\ W_{,y}(0, z) &= 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

在区域角点 $(b, 2h_0)$ 上, 有 5 个应力等同的条件, 其中有三个条件是相互独立的。如前所述, 数值解是用有限差分方法得到的。图 5.15 表示的两个铺层是用一系列规划间隔的具体点来描述的。在每一点上, 微分方程用有限差分算子逼近 (在区域内部用中心差分算子, 在边界上用前向和后向差分算子)。在层间界面上, $V, U, W, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 的连续条件用界面对称定位的质点近似地满足。

下面考察由 4 个单层组成的高模量石墨/环氧复合材料层合板, 材料的性能如下:

$$\begin{aligned} E_1 &= 20.0 \times 10^6 \text{ 磅 / 英寸}^2, G_{12} = G_{23} = G_{31} \\ &= 0.85 \times 10^6 \text{ 磅 / 英寸}^2 \\ E_2 &= E_3 = 2.1 \times 10^6 \text{ 磅 / 英寸}^2, \gamma_{23} = \gamma_{12} = \gamma_{31} = 0. \end{aligned} \quad (5.67)$$

在 $b=8h_0$ (宽度 4 倍于厚度) 的层合板中, 层间界面处 ($z=h_0$) 的应力 σ_x, τ_{xy} 和 τ_{xz} 如图 5.16 所示。

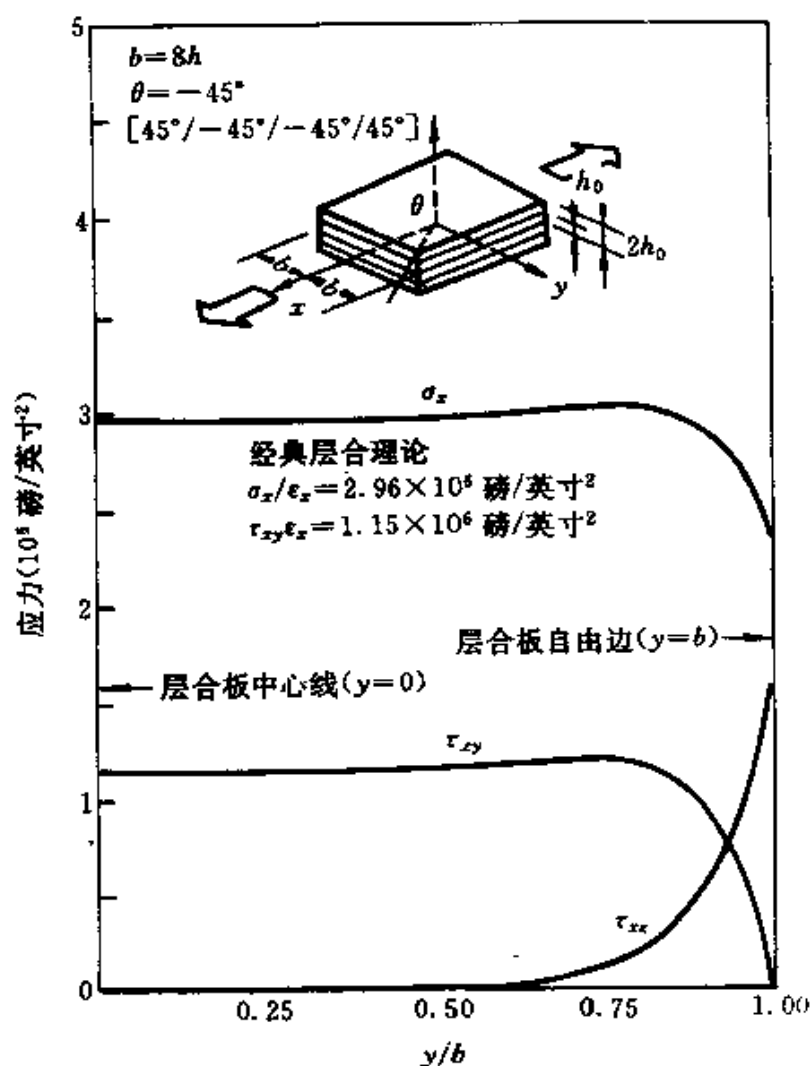


图 5.16 界面应力^[19]

显然,从图中可以发现,在远离边缘的层合板中间部位,应力值等同于经典层合理论的预报结果。然而,当接近自由边界时, σ_x 下降, τ_{xy} 趋于零,而 τ_{xz} 由零增加到无穷大(在 $y=\pm b$ 处出现奇点)。利用其它层合板的几何形状,已经证明与经典层合理论得到的应力有不同应力值的范围大约等于层合板的厚度 $4h_0$ 。因而,经典层合理论的偏差可看作是边界效应,在离开边缘一个层合板厚度后经典层合理论预报的结果是正确的。

距层合板中面不同距离处的层间剪应力 τ_{xz} 沿横截面厚度的分布用几种图线表示在图 5.17 中。由数值计算外推的应力值用虚

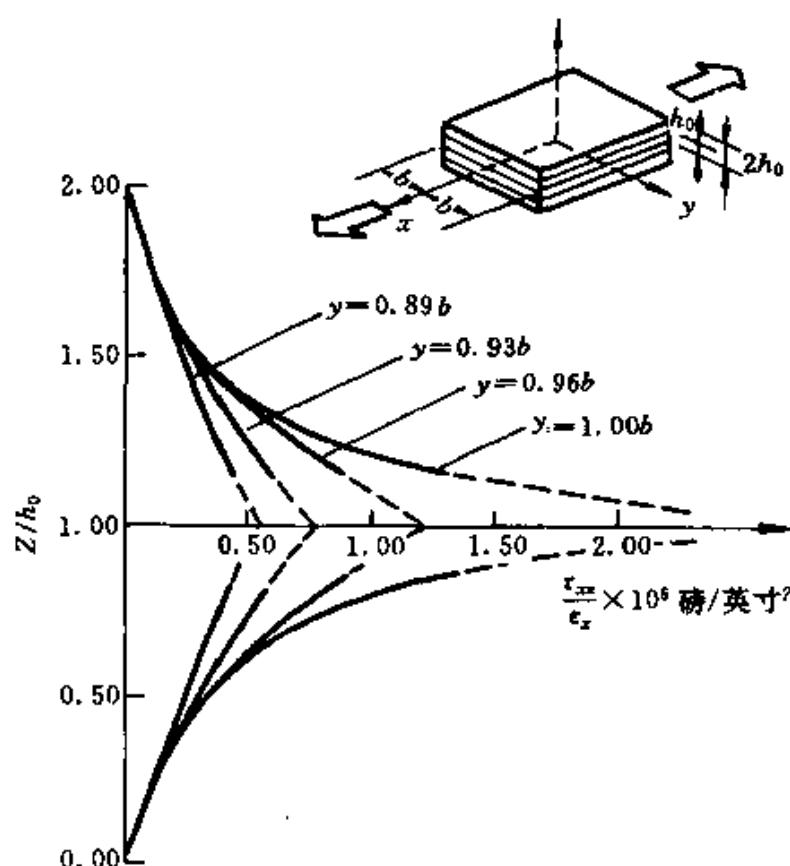


图 5.17 沿层合板厚度的层间剪应力分布^[19]

线表示。在层合板上表面和中面上 τ_{xz} 的值为零。对于任何图线，其极大值总是发生在层间界面上。当然， τ_{xz} 的最大值发生在自由端与层间界面的交线上并出现奇点。

对于四层层合板的不同铺设角度，随 θ 变的 τ_{xz} 如图 5.18 所示。绘出的值相应于在自由边缘上最接近于层间界面的质点上的 τ_{xz} ，而没有给出界面上的奇异值。注意，在 $\theta=60^\circ, 0^\circ, 90^\circ$ ， τ_{xz} 为零，对于非石墨/环氧，将给出不同曲线。

利用莫尔(Moire)法已经证实了上述模型预报的复合材料层合板中位移场的分布^[18]。莫尔法是由两组线列的相对位移引起的光学条纹现象决定的。一组线列置于试件上，另一组靠近它。条纹是垂直于线列方向相同位移分量的各点的轨迹。

长面平的石墨/环氧试件的应力-应变曲线直到断裂都是线性的。典型的莫尔条纹见图 5.19 左半部分的照片。图 5.19 的右半

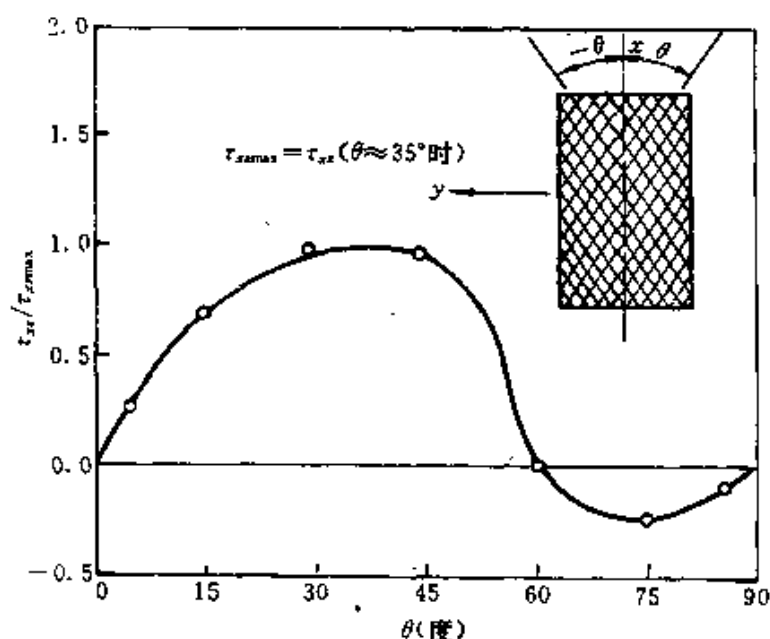


图 5.18 以纤维方向角为函数的层间剪应力^[19]

部分是 S 状莫尔条纹的图解。由莫尔条纹分析得出的轴向位移及上述模型的预报值一起表示在图 5.20 中。显然,拟合的非常好,证实了层间应力的存在。

层间应力的存在意味着层合复合材料在自由边缘附近可能产生分层,这种自由边缘是板边、孔的周围或者是管状试样的两端。由于分层的出现,将大大降低复合材料的使用强度。

层间应力受层合板叠合顺序的影响,这对于材料的优化设计很有意义, Pagano 及 Pipes^[16]曾经设想,改变叠合顺序可使层间正应力 σ_z 从拉伸变为压缩。他们的工作受到了 Foye 及 Baker^[20]下列观察的启发:对于 $\pm 15^\circ$, $\pm 45^\circ$ 对称角铺设层合板,当 $\pm 15^\circ$ 层和 $\pm 45^\circ$ 层位置颠倒时,其疲劳强度大约相差 25000 磅/英寸²。静强度及其它数据显示了类似的差别。这种差异很明显是由于分层造成的。

图 5.21 是一个对称的八层层合板横截面的脱离体图。层合板承受 x 方向载荷。层间应力传递机理包含着力矩的平衡。首先,自由边上 τ_{xz} 为零,但在别处是有限值,其力矩必须由层间剪应力 τ_{xy} 的力矩来平衡。其次, σ_z 引起的力矩必须平衡由 σ_y 引起的力矩,在

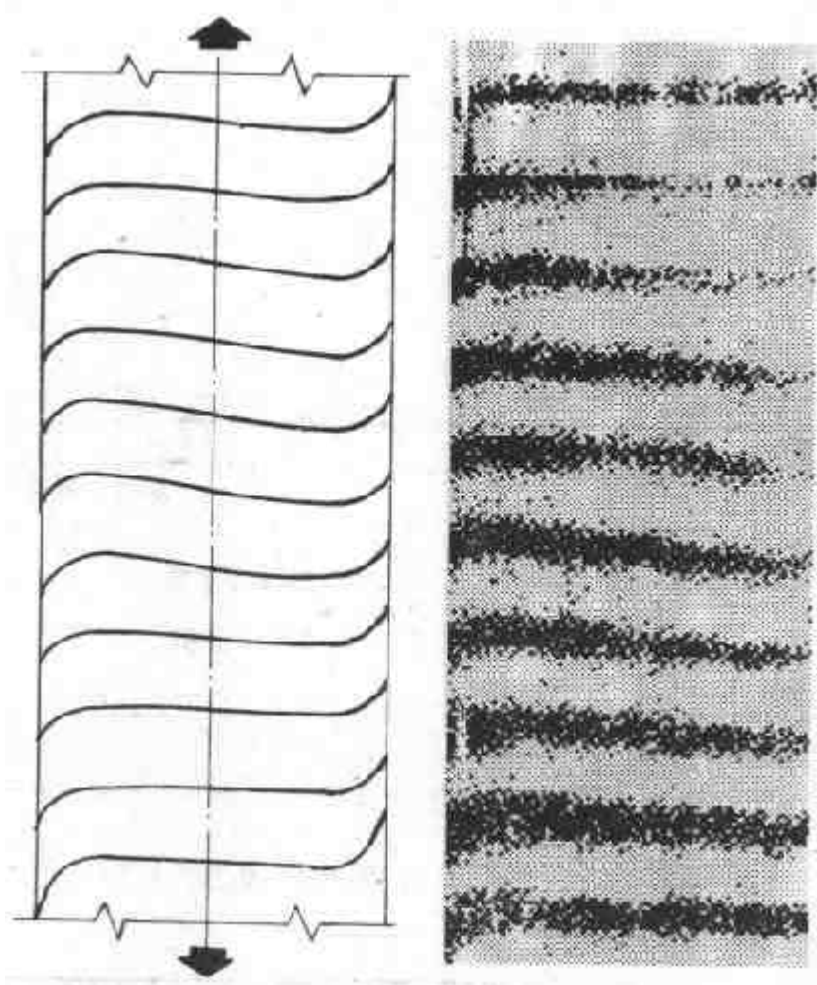


图 5.19 莫尔条纹图^[19]

脱离体中, 15° 层的拉应力 σ_y , 意味着自由边上有拉应力 σ_x ; 对压应力 σ_y , 则反之。计算得到的层间正应力 σ_z 的分布如图 5.22 所示。

如果将 45° 层放在层合板的外边, 用经典层合理论预测的 σ_y 为压应力, 因而 σ_x 也应为压应力, 层合板无分层趋向。因此, 对于 $[15^\circ/-15^\circ/45^\circ/-45^\circ]$, 和 $[15^\circ/45^\circ/-45^\circ/-15^\circ]$, 两种叠合顺序, σ_z 沿厚度的分布如图 5.23 所示。显然, 后一种铺设层间应力小, 分层倾向性小, 而具有较高的强度。利用类似的方法, 可以证实, 铺层 $[45^\circ/-45^\circ/15^\circ/-15^\circ]$, 界面将产生压应力面具有更高的强度。因此, 层间正应力 σ_z 的合理控制应该是层合板设计的关键。

对于反对称铺设的层合板, 其位移场 (5.60) 式应由下列方程

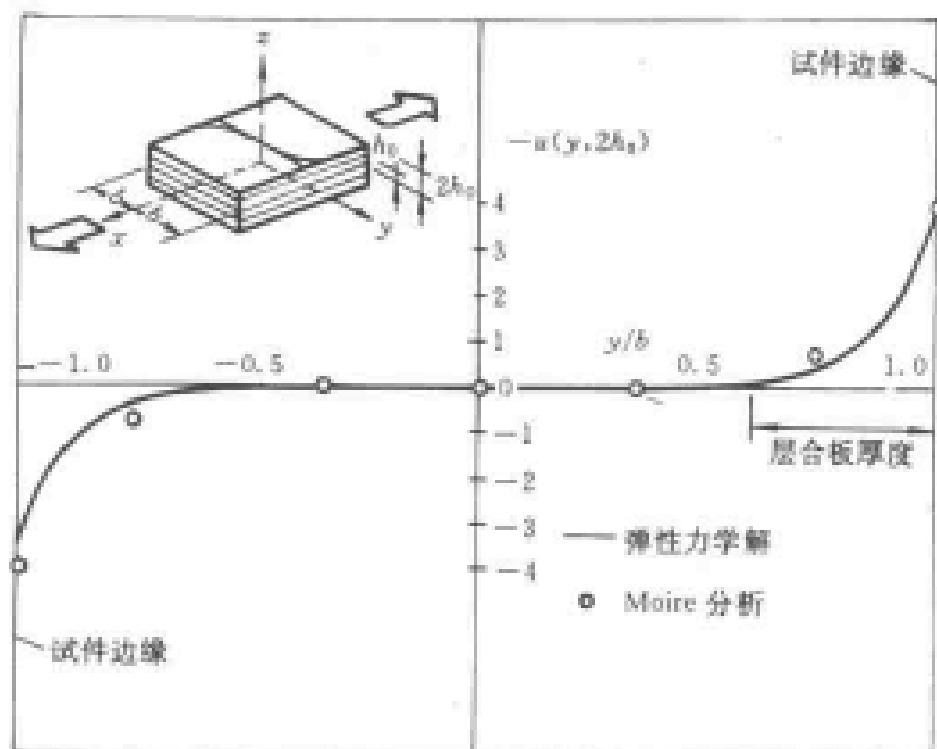


图 5.20 层合板表面 $x=2h_0$ 处的轴向位移分布^[29]

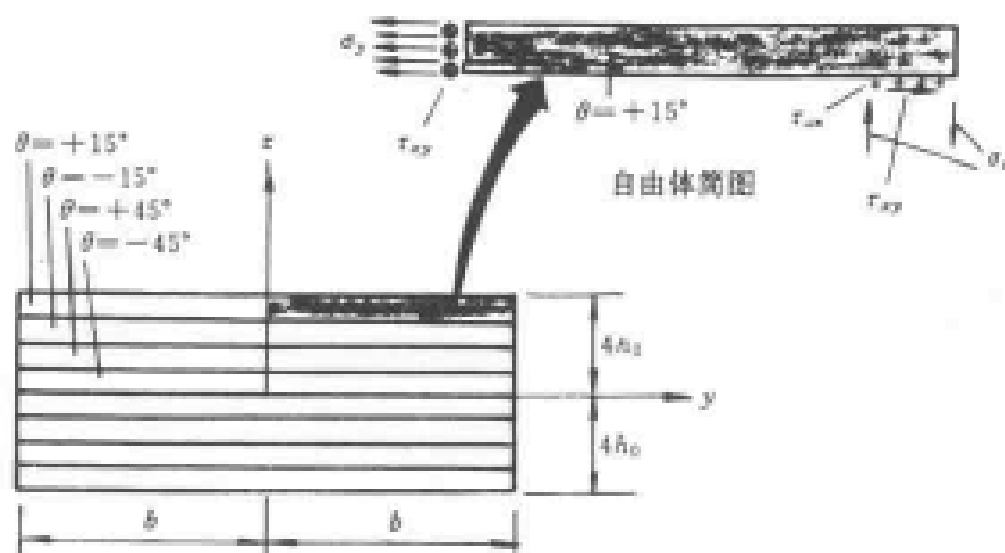


图 5.21 顶部铺层的层间应力

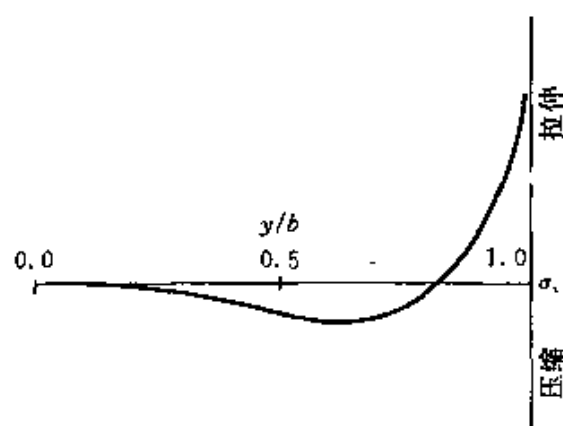


图 5.22 相对于 y 的层间应力分布^[19]

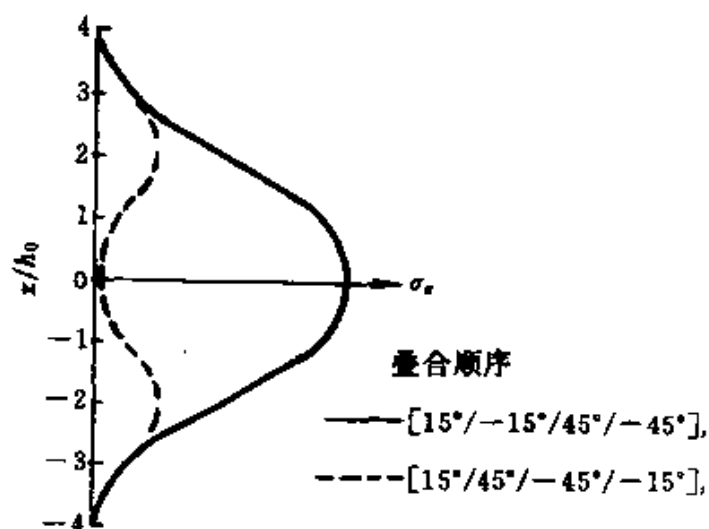


图 5.23 相对于 z 的边界层区域的层间正应力分布^[19]

代替,

$$\begin{aligned}
 u &= (c_1 + c_4 y + c_2 z)x + U(y, z) \\
 v &= V(y, z) - \frac{1}{2}(c_4 x - c_3 z)x \\
 w &= W(y, z) - \frac{1}{2}(c_2 x + c_3 y)x
 \end{aligned}
 \tag{5.68}$$

其余的求解过程与上面推导过程类似。

归纳一下,主要有三类层间应力问题:

(1) $\pm\theta$ 层合板仅存在剪切耦合(层间无泊松比不协调), 所以 τ_{xz} 是唯一不为零的层间应力。

(2) $0^\circ/90^\circ$ 层合板仅存在层间的泊松比不协调(无剪切耦合), 所以只有 τ_{yz} 和 σ_x 是不为零的层间应力。

(3) 上述的组合, 例如 $\pm\theta_1, \pm\theta_2$ 层合板存在层间剪切耦合及泊松比不协调二种情况, 所以层间应力有 $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_x$ 。

2. 复合材料脱层损伤中的应变能释放率

复合材料层合板的界面在什么样的条件下会发生脱层? 为回答这一问题, 同前文所述的基体横向开裂类似, 即可以采用应力准则, 又可以应用能量准则。尤其是当层与层的界面存在有初始脱胶缺陷时, 这种缺陷类似于断裂力学中研究的裂纹。因此为了评价层间缺陷何时失稳扩展, 采用能量准则是最合适的。因此, 目前有大量工作关于不同类型脱层所对应的应变能释放率的解析、数值计算方法及不同类型断裂韧性的测试方法。例如: Williams^[21,22] Wang 及 Williams^[23], Reeder 等^[24,25]。

下面我们将详尽介绍脱层应变能释放率的计算方法。考虑如图 5.24 所示的层合板脱层问题, 层合板厚度为 $2h$, 宽度为 B , 含

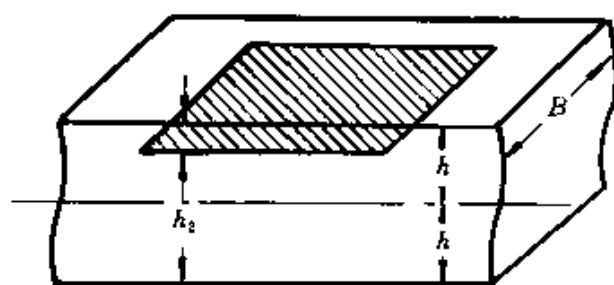


图 5.24 复合材料层合板脱层示意图

有一个贯穿的脱层区域, 并且假设载荷在复合材料层合板的宽度方向上是均匀分布的。详细分析一下脱层尖端载荷分布情况(如图 5.25 所示)。在脱层尖端 AB 截面上作用于脱层上、下梁的力矩分别为 M_1 及 M_2 。当脱层尖端由 AB 截面扩展 δa 至 CD 截面时, 系统整体自由能的降低率, 或应变能释放率为

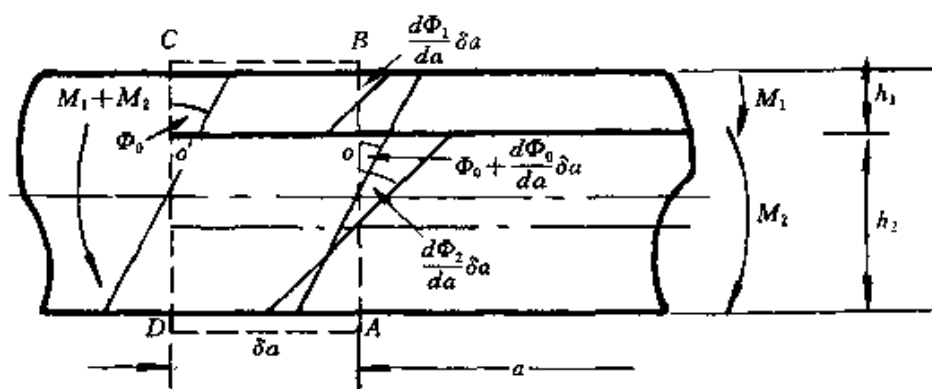


图 5.25 复合材料脱层尖端受载示意图

$$G = \frac{1}{B} \left(\frac{dU_e}{da} - \frac{dU_s}{da} \right) \quad (5.69)$$

式中, U_e 为外载对系统所作的功, U_s 为系统的应变能。

假设没有脱层扩展时, CD 横截面的转角为 Φ_0 , 显然, AB 截面的转角可表示成 $\Phi_0 + \frac{d\Phi_0}{da} \cdot \delta a$ 。当脱层尖端由 AB 截面扩展至 CD 截面时, 脱层上、下梁所产生的转角变化为

$$\left(\frac{d\Phi_1}{da} - \frac{d\Phi_0}{da} \right) \delta a \quad \text{及} \quad \left(\frac{d\Phi_2}{da} - \frac{d\Phi_0}{da} \right) \delta a \quad (5.70)$$

其中, 根据梁的理论, 可以建立转角同作用力矩之间的关系如下,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0}{da} &= \frac{M_1 + M_2}{EI_0}, & I_0 &= \frac{B(2h)^3}{12} = 8I \\ \frac{d\Phi_1}{da} &= \frac{M_1}{EI_1}, & I_1 &= \frac{Bh_1^3}{12} = \xi^3 I_0 \\ \frac{d\Phi_2}{da} &= \frac{M_2}{EI_2}, & I_2 &= \frac{B(h - h_1)^3}{12} = (1 - \xi)^3 I_0 \end{aligned} \quad (5.71)$$

式中, $I = \frac{Bh^3}{12}$, $\xi = \frac{h_1}{2h}$ 。

(5.70) 式表明由于脱层的存在, 脱层上、下部分的转角同未脱层时的转角是不相同的, 这种转角不同导致的系统自由能的下降是脱层产生及扩展的动力。这样, 在 $ABCD$ 段内外载所作的功的变化为

$$\delta U_e = M_1 \left(\frac{d\Phi_1}{da} - \frac{d\Phi_0}{da} \right) \delta a + M_2 \left(\frac{d\Phi_2}{da} - \frac{d\Phi_0}{da} \right) \delta a \quad (5.72)$$

将(5.70)及(5.71)式代入(5.72)式中,可以得到

$$\frac{dU_e}{da} = \frac{1}{8EI} \left[\frac{M_1^2}{\xi^3} + \frac{M_2^2}{(1-\xi)^3} - (M_1 + M_2)^2 \right] \quad (5.73)$$

根据梁的理论,可以得到应变能的改变为

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1^2}{EI_1} \delta a + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_2^2}{EI_2} \delta a - \frac{1}{2} \cdot \frac{(M_1 + M_2)^2}{EI_0} \delta a \quad (5.74)$$

因此,可以得到

$$\frac{dU_e}{da} = \frac{1}{16EI} \left[\frac{M_1^2}{\xi^3} + \frac{M_2^2}{(1-\xi)^3} - (M_1 + M_2)^2 \right] \quad (5.75)$$

将(5.73)及(5.74)式代入(5.69)式中,可以得到脱层的应变能释放率

$$G = \frac{1}{16EI} \left[\frac{M_1^2}{\xi^3} + \frac{M_2^2}{(1-\xi)^3} - (M_1 + M_2)^2 \right] \quad (5.76)$$

(5.76)式表明,只要求得脱层尖端所承受的载荷 M_1 及 M_2 , 即可以确定该脱层扩展的动力——应变能释放率。

对于其它类型的载荷,例如:图 5.26 所示的轴向载荷 P_1 及

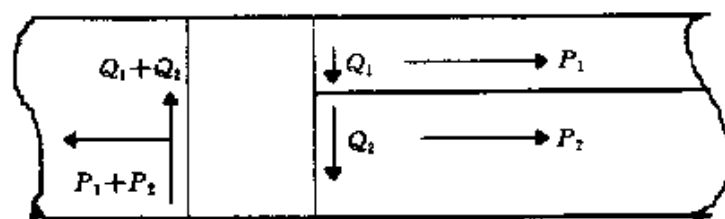


图 5.26 轴向载荷作用于裂纹尖端示意图

P_2 , 以及剪切载荷 Q_1 及 Q_2 , 类似于上面的推导, 可以得到由于轴向载荷而产生的应变能释放率为

$$G = \frac{1}{4BEA} \left[\frac{P_1^2}{\xi^3} + \frac{P_2^2}{(1-\xi)^3} - (P_1 + P_2)^2 \right] \quad (5.77)$$

式中, $A=Bh$ 。

剪切载荷可表示成力矩的导数 $Q = dM/da$, 并且剪应力分布可表示成

$$\tau = \frac{3}{2} \left(\frac{Q}{2Bh} \right) \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad (5.78)$$

式中, y 为离横截面中心的距离。由此可以得到

$$\frac{dU_s}{da} = 2B \int_0^h \frac{(1+\gamma)}{E} \tau^2 dy = \frac{6}{5} \cdot \frac{1+\gamma}{E} \cdot \frac{Q^2}{2Bh} \quad (5.79)$$

因此, 应变能释放率可表示成

$$G = \frac{3}{5} \cdot \frac{1+\gamma}{BEA} \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{dM_1}{da} \right)^2 + \frac{1}{1-\xi} \left(\frac{dM_2}{da} \right)^2 - \left(\frac{dM_1}{da} + \frac{dM_2}{da} \right)^2 \right] \quad (5.80)$$

当复合材料层合板承受轴向均匀载荷, 上、下梁的应变相同, 为

$$\frac{P_1}{\xi} = \frac{P_2}{1-\xi} \quad (5.81)$$

这种情况下, $G=0$ 。

实验证实, 针对于不同载荷, 脱层可能像材料中裂纹一样, 会由于张开而扩展、滑移扩展及撕裂扩展、对应于不同的扩展方式, 复合材料界面的断裂韧性不尽相同, 因此有必要将上面求得的应变能释放率按不同的扩展类型进行分类, 以便真正确定脱层的扩展准则及形式。考虑复合材料层合板在力矩的作用下, 为了得到纯 I 型脱层滑移开裂, 脱层上、下两梁的曲率应该相同, 即

$$\frac{d\Phi_1}{da} = \frac{d\Phi_2}{da} \quad (5.82)$$

因此, 如果力矩 M_1 作用于上面梁上, 而 ψM_1 作用于下面梁上, 则

$$\frac{M_1}{EI_1} = \frac{\psi M_1}{EI_2}, \quad \text{即 } \psi = \left(\frac{1-\xi}{\xi} \right)^3 \quad (5.83)$$

对于 I 型开裂, 力矩 $-M_1$ 作用于上面梁上, 而 M_1 作用于下面梁上, 因此, 脱层尖端载荷力矩可分解成

$$M_1 = M_1 - M_1, \quad M_2 = \psi M_1 + M_1 \quad (5.84)$$

因此, 可以求得

$$M_1 = \frac{M_2 - \phi M_1}{1 + \phi}, \quad M_1 = \frac{M_2 + M_1}{1 + \phi} \quad (5.85)$$

将(5.85)及(5.84)式代入(5.76)式中,可以得到

$$G = G_1 + G_2 \quad (5.86)$$

式中

$$G_1 = \frac{M_1^2}{BEI} \cdot \frac{1 + \phi}{16(1 - \xi)^3}, \quad G_2 = \frac{M_1^2}{BEI} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{1 - \xi}{\xi^2} (1 + \phi) \quad (5.87)$$

在轴向载荷作用下,仅仅会出现 I 型开裂,

$$P_1 = P_1 + P_1, P_2 = P_1 + \left(\frac{1 - \xi}{\xi}\right)P_1 \quad (5.88)$$

因此,可以得到

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{P_1^2}{4BEA} \cdot \frac{(1 - 2\xi)^2}{\xi(1 - \xi)} = G \quad (5.89)$$

式中

$$P_1 = - \left[\frac{\xi P_2 - (1 - \xi)P_1}{1 - \xi} \right] \quad (5.90)$$

剪切载荷 Q 仅仅产生 I 型张开开裂

$$Q_1 = Q_1 - Q_1, \quad Q_2 = \left(\frac{1 - \xi}{\xi}\right)Q_1 + Q_1$$

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{3(1 + \gamma)Q_1^2}{5BEA} \left[\frac{1}{\xi} + \frac{1}{1 - \xi} \right] \quad (5.91)$$

$$Q_1 = \xi Q_2 - (1 - \xi)Q_1 = \xi \frac{dM_2}{da} - (1 - \xi) \frac{dM_1}{da}$$

下面将针对用于实验测量界面断裂韧性的脱层构型为例,具体计算应变能释放率。

(1) 双悬臂梁模型

材料构型如图 5.27 所示,其中, $\xi = 1/2$ 及 $\phi = 1$, 对于对称载荷图 5.27(a), $M_2 = -M_1 = pa$, 以及 $M_1 = 0, M_1 = pa$, 因此, $G_1^{(1)} = p^2 a^2 / BEI$, 剪应力的贡献可求得为 $\frac{dM_2}{da} = -\frac{dM_1}{da} = p$, 及 $G_1^{(2)} = \frac{12(1 + \gamma)p^2}{5BEA}$, 因此, 应变能释放率为

$$G_1 = \frac{12p^2a^2}{B^2Eh^3} \left[1 + \frac{(1+\gamma)}{5} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \right] \quad (5.92)$$

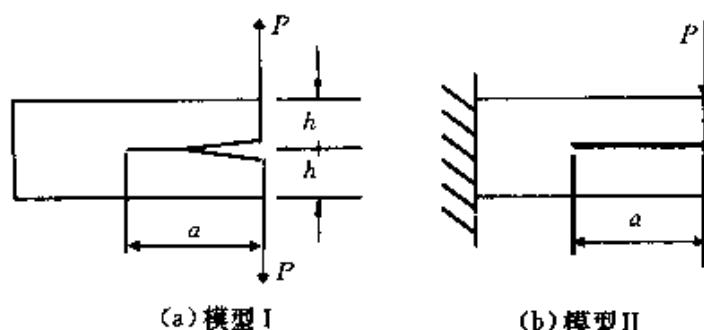


图 5.27 双悬臂梁脱层模型

对于图 5.27(b)所示的构型, $M_1 = M_2 = pa/2$, $M_1 = pa/2$ 及 $M_1 = 0$, 因此, 给出了纯 I 型的应变能释放率

$$G_1 = \frac{9}{4} \cdot \frac{p^2a^2}{B^2Eh^3} \quad (5.93)$$

(2) 变混合度实验模型

试件如图 5.28 所示, $\xi = 1/2$, 当 $0 < a \leq l$ 时, 有

$$M_1 = M_2 = \frac{pa}{2} \left(1 - \frac{l}{L} \right)^2 \quad (5.94)$$

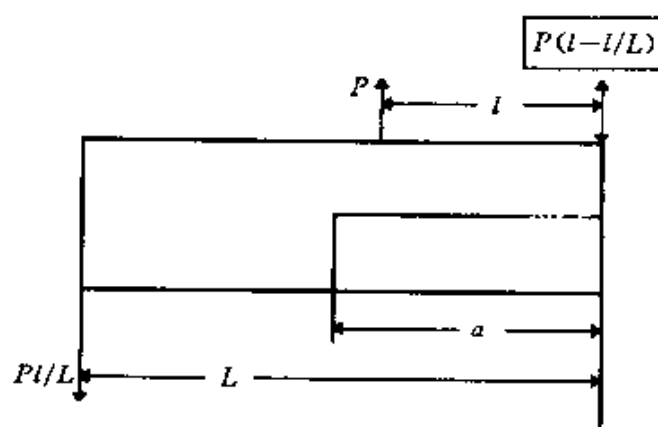


图 5.28 变混合度脱层实验模型

因此

$$G_1 = 0, \quad G_2 = \frac{9}{4} \times \frac{p^2 a^2}{B^2 E h^3} \left(1 - \frac{l}{L}\right)^2 \quad (5.95)$$

这种情况下为纯 I 型载荷。当 $l \leq a \leq L$, 梁之间载荷为

$$P_1 = \frac{P}{2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{l}{a}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{a}\right)^3 - \frac{l}{L} \right] \quad (5.96)$$

因此, $M_1 = P_1 \frac{la}{L} - P_1 a$, $M_2 = P_1 a$, $M_3 = \frac{pl}{2} \left(1 - \frac{a}{L}\right)$, $\dot{M}_1 = \frac{pl}{4} \left[1 - \left(\frac{l}{a}\right)^2\right]$, 这样, 应变能释放率可以求得为

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(\frac{p^2 l^2}{B^2 E h^3}\right) \cdot \frac{3}{4} \left[1 - \left(\frac{l}{a}\right)^2\right]^2, G_1 \\ &= \left(\frac{p^2 l^2}{B^2 E h^3}\right) \cdot \frac{9}{4} \left[1 - \left(\frac{a}{L}\right)\right]^2 \end{aligned} \quad (5.97)$$

当 $a=L$ 时, 相当于纯 I 型加载。

(3) 固定混合度实验模型

图 5.29 中显示了该试件构型, 其中

$$M_1 = 0, M_2 = \frac{pa}{2}, M_3 = M_4 = \frac{pa}{2(1+\phi)}, \phi = \left(\frac{1-\xi}{\xi}\right)^3 \quad (5.98)$$

由此可以求得

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(\frac{p^2 a^2}{B^2 E h^3}\right) \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{(1+\phi)^2} \left[\frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{(1-\xi)^3}\right] \\ G_2 &= \left(\frac{p^2 a^2}{B^2 E h^3}\right) \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{(1+\phi)^2} \cdot \frac{(1-\xi)^4}{\xi^2} \left[\frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{(1-\xi)^3}\right] \end{aligned} \quad (5.99)$$

图 5.29(b) 是该试件的变种, 其中, $M_1=0, M_2=pa$, 应变能释放率为 (5.99) 式的 4 倍。

(4) 压缩开裂

考虑复合材料层合板在压缩载荷作用下 (如图 5.30 所示)。当载荷沿轴线方向时 (图 5.30a), 如果不会出现横向失稳, 则 $G=0$, 如果横向出现失稳, 将产生一个力矩 M_0 使得脱层扩展。

首先考察梁的失稳问题。设 v 为横向位移, P_c 是临界载荷, 其

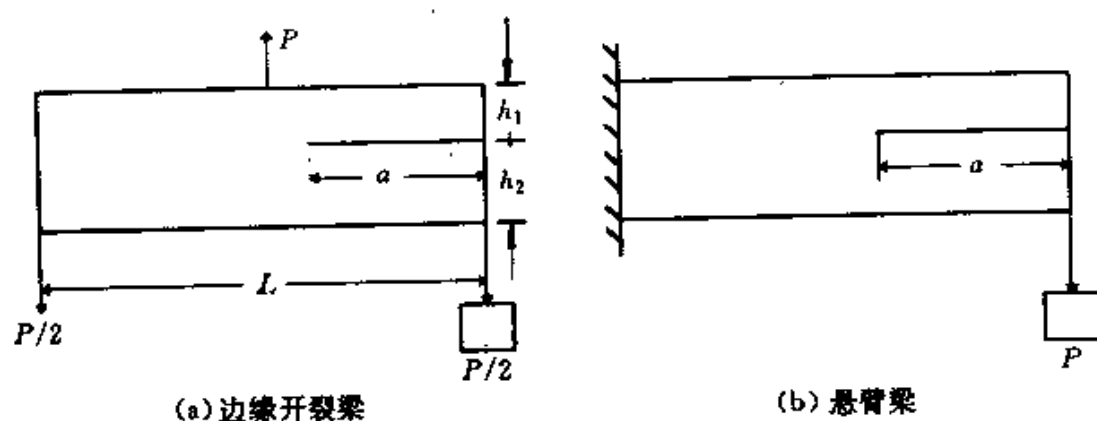


图 5.29 固定混合度脱层实验模型

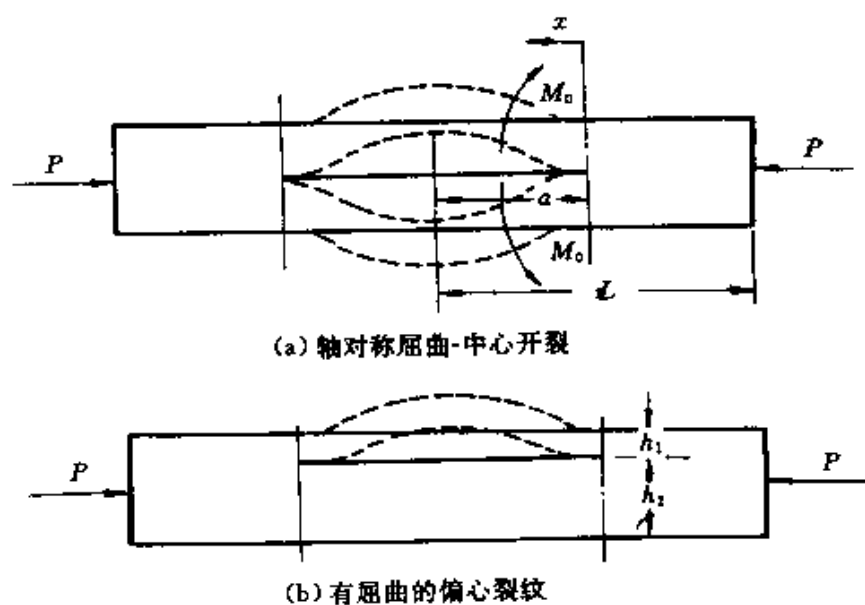


图 5.30 复合材料轴向压缩脱层模型

方程为

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_0 - P_c v/2}{EI} \quad (5.100)$$

边界条件可以写成

$$x = 0 \text{ 时, } v = \frac{dv}{dx} = 0; \quad x = a \text{ 时, } \frac{dv}{dx} = 0 \quad (5.101)$$

如果 $\alpha = P_c/2EI$, 则 $v = (2M_0/P_c)(1 - \cos \alpha x)$, 临界载荷可求得为

$P_c/2 = \frac{\pi^2 EI}{a^2}$, M_0 可由下列方程求得

$$\frac{M_0^2}{EI} = \frac{P_c \delta}{a} = \frac{2\pi^2 \delta EI}{a^3} \quad (5.102)$$

式中, 位移 δ 可由如下能量方程求得

$$\frac{P_c}{2} \delta = 2 \int_0^a \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2}{EI} dx = \frac{M_0^2}{EI} \cdot \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \cos^2 z dz \quad (5.103)$$

因此, 在力矩 $M_1 = M_0$ 作用下, 其应变能释放率为

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{M_0^2}{BEI} = \frac{P_c \delta}{Ba} \\ &= \frac{E}{L} \left(\frac{h}{a} \right) u_c (u - u_c) \end{aligned} \quad (5.104)$$

式中, $u_c = \pi^2/6 \cdot L \left(\frac{h}{a} \right)^2$, $u = \delta + \frac{P_c}{2Bh} \cdot \frac{2L}{E}$ 。

对于如图 5.30(b) 所示的偏轴压缩, 情况较为复杂, 因为首先上面的薄层将发生失稳, 其临界载荷为 $P_{1c} = \frac{\pi^2 EI_1}{a^2} = \xi P_c$, 因此, 可求得弯矩为

$$M_0^2 = \frac{3}{4} h^3 \cdot \frac{\xi^4}{1 - \xi} \cdot P_c (P - P_c) \quad (5.105)$$

根据平衡条件可以求得

$$\begin{aligned} M_1 &= -M_0, M_2 = -M_0 + \xi h (P - P_c) \\ P_1 &= -P_c, P_2 = -P + P_c \end{aligned} \quad (5.106)$$

这样, 可以求得应变能释放率为

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{4}{a^2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \frac{[1 - \psi - \beta]^2}{\psi(1 + \psi)} \\ G_1 &= \left(1 - \frac{1}{a^2} \right)^2 + \frac{12}{a^2} \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \times \frac{\xi(1 - \xi)}{1 + \psi} (2 - \beta)^2 \end{aligned} \quad (5.107)$$

式中, $\beta^2 = \frac{3}{4} \times \frac{1 - \xi}{\xi^2} (a^2 - 1)$, $a^2 = \frac{P}{P_c}$ 。图 5.31 绘出了应变能释放率随 a^2 变化曲线。

(5) 缺口处纵向开裂

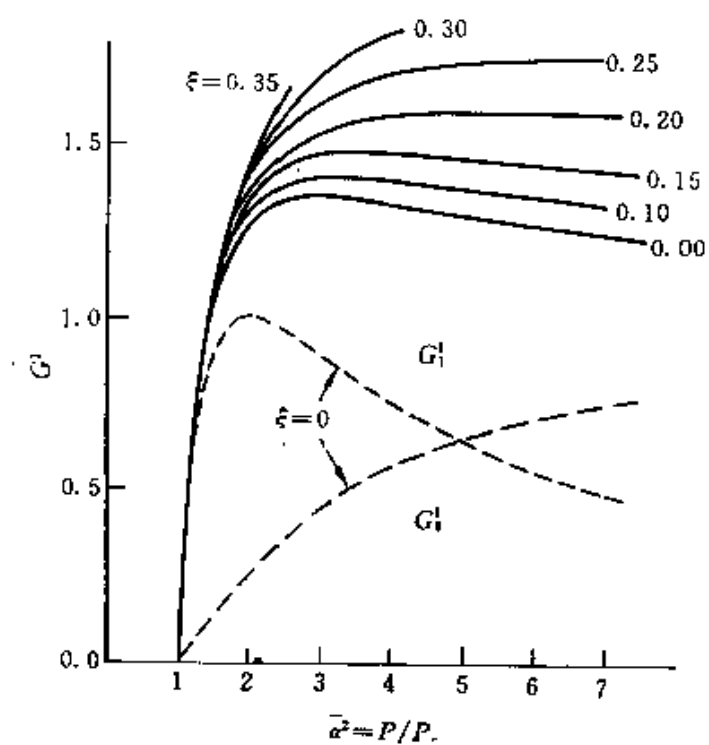


图 5.31 压缩载荷作用下, 脱层应变能释放率变化曲线

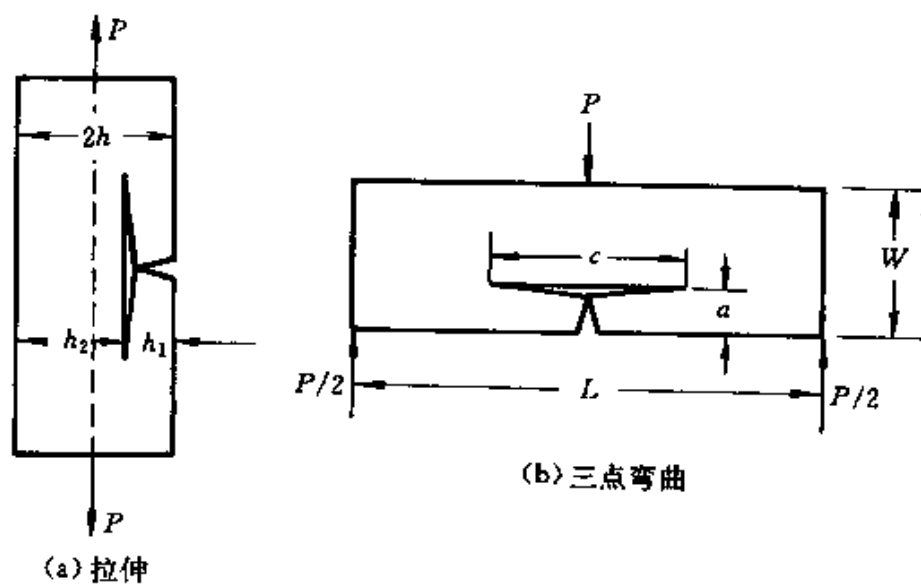


图 5.32 缺口处横向撕裂模型

试件构型如图 5.32 所示。对于图 5.32(a)所示,我们知道 $P_1 = 0, P_2 = P$, 因此,可以得到

$$G_1 = \frac{P_1^2}{4BEA} \cdot \frac{(1-2\xi)^2}{\xi(1-\xi)}, P_1 = \frac{\xi P}{1-2\xi} \quad (5.108)$$

对于三点弯曲构型(图 5.32(b)), $M_1 = 0, M_2 = P/4(L-C)$, 代入 (5.76) 式中可方便地求得应变能释放率。

复合材料层合板的脱层损伤是常见的复杂的工程实际问题, 损伤往往起源于自由边缘及在加工过程中产生的内部缺陷, 而且脱层区域往往是平面二维埋藏区域(如图 5.33 所示), 计算这种构型的应变能释放率是很复杂的问题, 往往需要利用有限元等数值方法求解。而且, 脱层损伤与基体横向开裂损伤之间的相互作用也

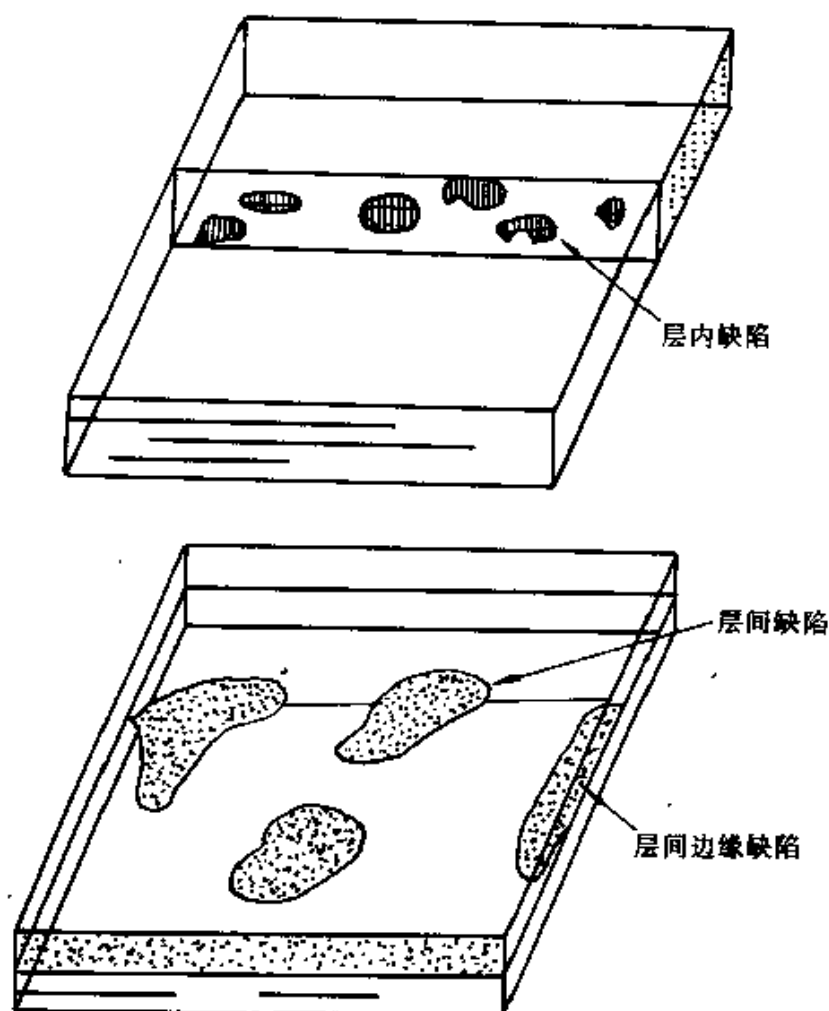


图 5.33 二维平面脱层问题

是工程实际中经常遇到的问题。最后,值得强调的是,复合材料损伤是多种多样的,这里考虑的仅是两类最典型的损伤模式。

§ 5.2 脆性基体复合材料断裂模型

众所周知,陶瓷等一些脆性材料具有耐高温、耐腐蚀、耐磨损、价廉等许多优异的性能。然而由于它们所具有的极低的断裂韧性限制了它们的广泛应用。近年来,人们投入了较大的物力及财力用于改进陶瓷材料的韧性。其中,所采用的单向纤维增强脆性陶瓷的方案取得了极大的成功。含有缺陷的纤维增强脆性基体复合材料断裂机理同一般的树脂基复合材料不同,当外加载荷达到某临界值时,往往在基体材料中产生横向开裂,而纤维并未断裂继续承载,当然,由于纤维的增强作用,使基体产生横向开裂的临界载荷也将远远高于无增强基体的断裂应力。目前,人们已经进行了大量的研究工作用于解释脆性基体复合材料的破坏机理,并预报纤维与基体的界面性能等微结构参数对复合材料断裂应力的影响。

§ 5.2.1 脆性基体稳态开裂应力

考虑单向纤维增强陶瓷基复合材料,在沿纤维方向拉伸载荷的作用下,首先基体会产生开裂(图 5.34)。其典型的拉伸应力-应变曲线如图 5.35 所示。初始阶段为无损伤线弹性变形阶段,其复合材料弹性模量可以利用混合律求得,在 A 点,载荷出现一微小下降,这对应着基体大范围上开裂,形成了近似等距周期排布的贯穿裂纹,随后的载荷可以认为基本上由纤维束承担,直至材料的整体破坏。很显然,纤维与基体之间界面性质不同,所对应的基体宏观开裂应力也将不同。最早, Aveston, Cooper 及 Kelly^[26-30]等利用能量关系预报了基体的开裂应力,并详尽研究了界面结合完好,出现大范围滑移,部分滑移情况下对开裂应力的影响。后来, Budiansky, Hutchinson 及 Evans^[31]又推广了 ACK 理论,利用能量方法成功地预报了基体稳态开裂应力,他们研究了界面结合完

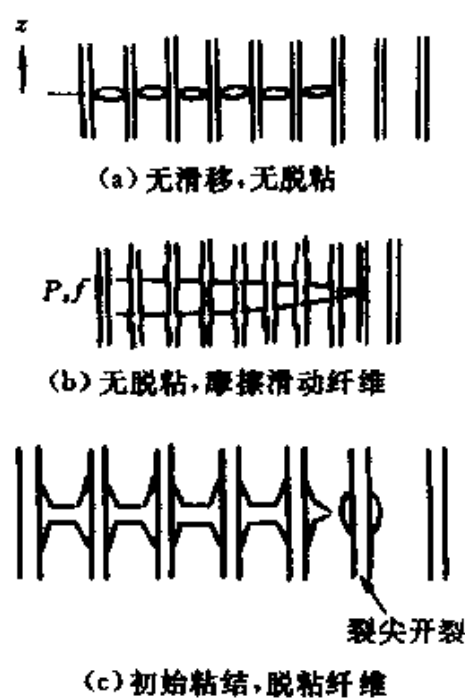


图 5.34 复合材料基体稳态开裂模型

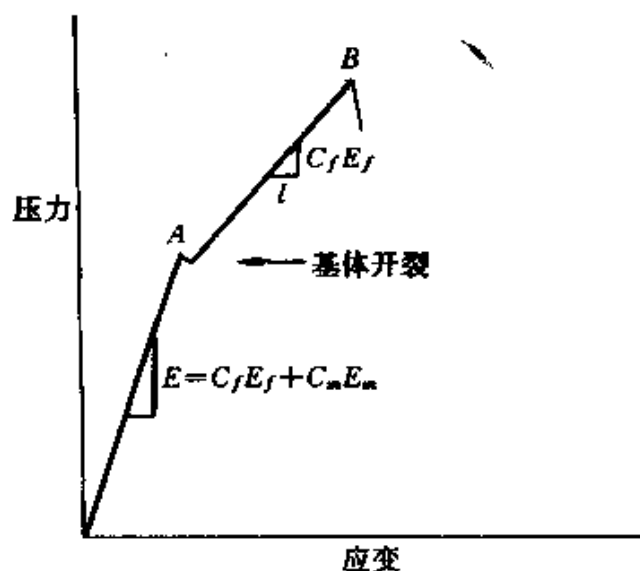


图 5.35 脆性基体复合材料应力-应变曲线示意图

好, 界面并未粘结, 只是通过残余应力导致的界面摩擦限制纤维与基体之间的滑移, 界面初始粘结, 但一旦开裂后就没有任何摩擦阻

力等三种情况,得出了基体稳态开裂应力的解析表达式。

1. 能量关系式

为了求得基体开裂的动力,应首先求得在外载保持常值时,由于裂纹的扩展、张开及界面滑移,整个系统自由能的降低。由于纤维增强陶瓷基复合材料往往在高温下成型,材料内部不可避免地存在有较大的残余应力。因此,我们可以将材料分为三种状态(图 5.36)。状态 0 表示材料系统不受任何外载作用,而只承受加工过

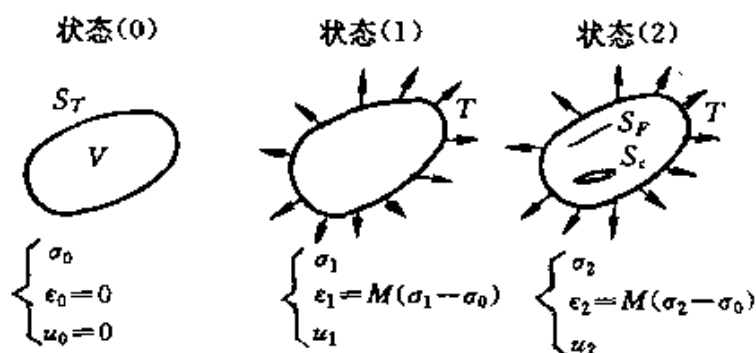


图 5.36 材料的三种状态图

程产生的残余应力。状态 1 表示系统在外载 T 作用下,其产生的应变场及应力场分别为 ϵ_1, σ_1 ,其内部可能含有做为初始参考状态的裂纹及缺陷。状态 2 表示系统的外载保持不变,但裂纹相对于状态 1 可能产生了进一步的扩展,界面也可能产生了进一步的滑移,这时,系统内的载荷及应变为 σ_2, ϵ_2 。这也是人们寻找对应于损伤演化的应变能释放率的通常做法。很显然,裂纹以状态 1 扩展至状态 2 所释放的弹性能为 $(\pi_1 - \pi_2)$,其中 π_1 及 π_2 分别为两种状态下弹性 Gibbs 自由能

$$\pi_1 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_1 : M(\sigma_1) dv - \int_S T \cdot u_1 dS \quad (5.109)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_2 : M(\sigma_2) dv - \int_S T \cdot u_2 dS \quad (5.110)$$

式中, M 为线性算子,其应力-应变关系为

$$\varepsilon = M(\sigma - \sigma_0) \quad (5.111)$$

式中, σ_0 为残余应力。

(5.109)及(5.110)式中第一项体积积分为系统中的应变能, 后一项为外力对系统所作的功。因为 $\sigma_1 : M(\sigma_2) = \sigma_2 : M(\sigma_1)$, 因此, 可以得到释放的能量为

$$\pi_1 - \pi_2 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 + \sigma_2) : M(\sigma_1 - \sigma_2) dv - \int_S T \cdot (u_1 - u_2) dS \quad (5.112)$$

如果假设由状态 1 向状态 2 变化过程中, 作用在滑移面 S_F 上剪切力与滑移方向相反, 并为一常向量 τ_S , 这样, 利用虚功原理可以得到由状态 1 转化到状态 2 时外力所作的功

$$\int_S T \cdot (u_1 - u_2) dS = \int_V \sigma_2 : M(\sigma_1 - \sigma_2) dv - \tau_S \int_{S_F} |\Delta v| dS \quad (5.113)$$

式中, $|\Delta v|$ 为相对滑移量。这样, (5.112) 式成为

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_2 &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 - \sigma_2) : M(\sigma_1 - \sigma_2) dv + \tau_S \int_{S_F} |\Delta v| dS \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 - \sigma_2) : (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) dv + \xi_F \end{aligned} \quad (5.114)$$

式中, ξ_F 为由状态 1 转化到状态 2 时由于界面滑移而消耗的能量。

2. 稳态裂纹扩展

考虑在单位厚度很宽的单向纤维增强复合材料试件中有一长度为 S 的裂纹(图 5.37)。此时裂纹尖端在 cc 截面, 但所有纤维均未断裂。保持载荷不变, 使裂纹尖端向前扩展 ΔC 至 $c'c'$ 截面。根据前文中对状态的分类, 相对于这一问题, 0 状态相应于无裂纹及无外载仅有残余应力的状态, 1 状态相应于在外载作用下, 裂纹尖端处于 cc 位置, 而 2 状态则相应于在相同外载作用下, 裂纹尖端扩展至 $c'c'$ 位置。稳态裂纹扩展可以理解为远离裂纹尖端的区域中的应力场及应变场的分布不会因裂纹扩展而改变。因此, 如果定义 P_U 及 P_D 为远离裂纹尖端的前端及尾端单位横截面积弹性势能,

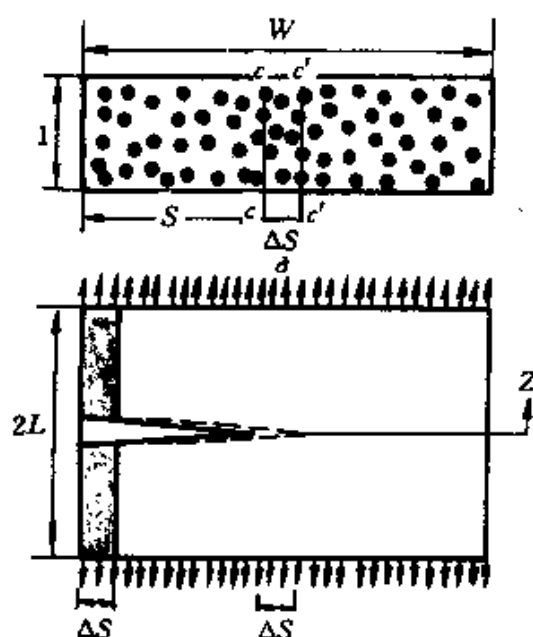


图 5.37 复合材料基体中的扩展裂纹

可以表示成

$$\pi_1 - \pi_2 = (P_U - P_D)\Delta S \quad (5.115)$$

利用(5.114)式可以得到

$$P_U - P_D = \frac{1}{2A_c} \int_{-L}^L \int_{A_c} (\sigma_U - \sigma_D) : (\epsilon_U - \epsilon_D) dA dz + \frac{\sigma_F}{\Delta S} \quad (5.116)$$

式中, $\sigma_U, \epsilon_U, \sigma_D, \epsilon_D$ 分别为前端及尾端的应力及应变场, A_c 为代表性面积单元。

如果纤维及基体界面并未粘结,只是由于残余应力的作用使得界面靠摩擦阻力控制,这样,材料由状态1转化到状态2所释放的弹性势能将用于抵消已开裂部分基体的断裂能 φ_m 及摩擦阻力能,因此,(5.116)式成为

$$\frac{1}{2A_c} \int_{-L}^L \int_{A_c} (\sigma_U - \sigma_D) : (\epsilon_U - \epsilon_D) dA dz = c_m \varphi_m \quad (5.117)$$

式中, c_m 为基体所占的体积含量。(5.117)式是一种能量方程,根据它可以求得纤维增强脆性基体复合材料中基体稳态开裂应力,

它对于纤维与基体界面滑移情况及结合完好未滑移情况都是适用的。

对于初始纤维与基体界面结合完好,在外载作用下,界面发生开裂,而由于残余拉应力的作用,界面发生开裂后就不具有摩擦阻力,这种情况下,释放的能量不仅要抵消基体开裂所需的能量而且还要抵消单位面积界面产生脱胶的 $c_f/(\pi a^2)$ 根纤维的界面开裂能 $4c_f(l_d/a)\varphi_d$, 因此

$$\frac{1}{2A_c} \int_{-L}^L \int_{A_c} (\sigma_U - \sigma_D) : (\epsilon_U - \epsilon_D) dA dz = c_m \varphi_m + 4c_f(l_d/a)\varphi_d \quad (5.118)$$

式中, l_d 为界面开裂长度, c_f 为纤维体积含量, a 为纤维半径。为了利用方程(5.117)及(5.118)式计算基体的稳态开裂应力,必须首先计算裂纹前端及尾端的应力场分布 σ_U 及 σ_D 。

3. 纤维及基体中应力分析

(1) 裂纹前端纤维及基体中的应力

在远离裂纹尖端未开裂的材料就如同不含裂纹的材料一样,其基体及纤维中应变是相同的,因此,纤维及基体中应力分别为

$$\begin{aligned} \sigma_f^U &= (E_f/E)\sigma + \sigma_f^I \\ \sigma_m^U &= (E_m/E)\sigma + \sigma_m^I \end{aligned} \quad (5.119)$$

式中, σ 为外加载荷, σ_f^I 及 σ_m^I 分别为纤维及基体中初始残余应力, E_f 及 E_m 分别为纤维及基体的杨氏模量,而 E 为复合材料的杨氏模量,由混合律可求得为

$$E = E_f c_f + E_m c_m \quad (5.120)$$

各组分相中应力应满足如下条件

$$\begin{aligned} c_f \sigma_f^I + c_m \sigma_m^I &= 0 \\ c_f \sigma_f + c_m \sigma_m &= \sigma \end{aligned} \quad (5.121)$$

(2) 裂纹尾区的应力场分布

在裂纹尖端后端的裂纹界面上,其纤维及基体中的应力分别为

$$\begin{aligned}\sigma_f &= \sigma/c_f \\ \sigma_m &= 0\end{aligned}\quad (5.122)$$

当远离裂纹表面的地方,复合材料的承载基本上恢复到未断裂状态,其纤维及基体中应力场仍然可由(5.119)式求得。而对于远离裂纹尖端又比较靠近于裂纹表面的地方,可由前文所述的剪滞法计算求得纤维及基体中的应力分布。

a. 纤维与基体界面结合完好,无任何滑移情况

为了采用剪滞法,取出一材料单元体(如图 5.38 所示)。半径

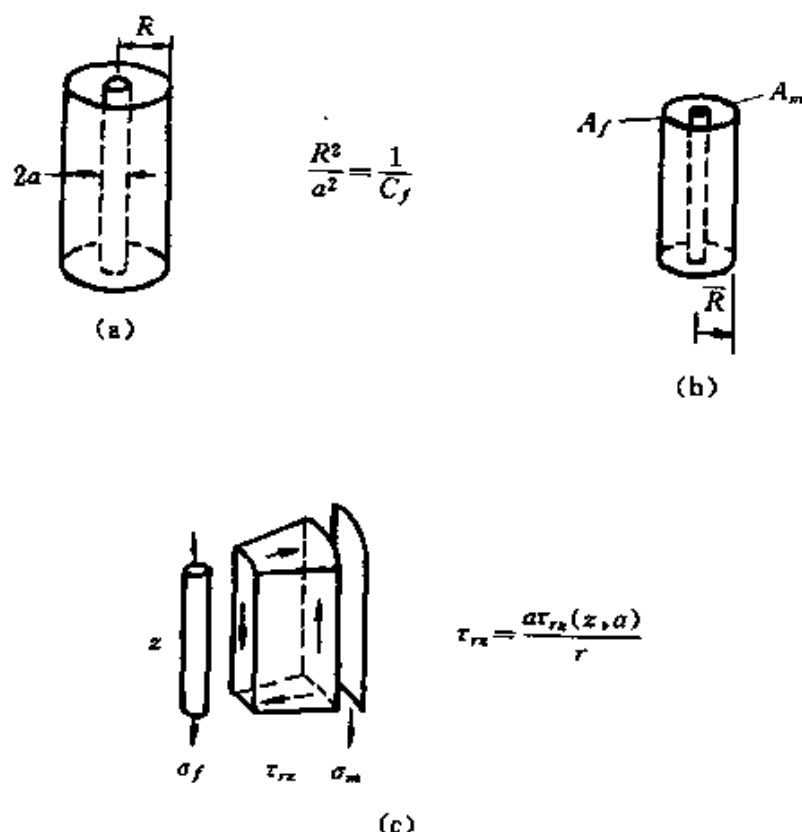


图 5.38 剪滞法模型

为 a 的纤维由一层半径为 R 的圆柱形基体包裹。 R 可以正确地确定以满足材料对纤维体积分量的要求, $R=a/\sqrt{c_f}$ 。为了使问题简化,可以认为在 a 及 R 之间基体所承受的轴向载荷均集中在半径为 $\bar{R}$ 的圆环上,而 $a < r < \bar{R}$ 区间的基体仅承担剪切载荷 $\tau_{rz}(r, z)$ 。

该区域中的平衡方程及本构方程分别为

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (5.123)$$

$$\tau_{rz} = G_m \frac{\partial w}{\partial r}$$

式中, $W(r, z)$ 为轴向位移, 利用纤维及基体界面条件, 求解方程 (5.123) 式可以求得

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{a\tau_i(z)}{r} \quad (5.124)$$

式中, $\tau_i(z)$ 为界面剪切应力, 由下式确定

$$\tau_i(z) = \frac{G_m(w_m - w_f)}{a \ln(\bar{R}/a)} \quad (5.125)$$

式中, $w_f = W(a, z)$, $w_m = W(\bar{R}, z)$ 分别为纤维及基体的轴向位移, 纤维的轴向平衡方程可写成

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial z} + \left(\frac{2}{a}\right)\tau_i = 0 \quad (5.126)$$

而且

$$\frac{\sigma_f - \sigma_f^I}{E_f} = \frac{dw_f}{dz}, \quad \frac{\sigma_m - \sigma_m^I}{E_m} = \frac{dw_m}{dz} \quad (5.127)$$

联立求解 (5.125), (5.126), (5.127) 及 (5.121) 式, 并利用 $z=0$ 及 $|z|=\infty$ 时边界条件 (5.122) 式及 (5.119) 式, 可以求得尾区纤维及基体中的应力

$$\begin{aligned} \sigma_f^D - \sigma_f^U &= (c_m/c_f)\sigma_m^U e^{-\rho|z|/a} \\ \sigma_m^D - \sigma_m^U &= -\sigma_m^U e^{-\rho|z|/a} \\ \tau_i^D &= \frac{z}{|z|} \times \frac{\rho}{2}(c_m/c_f)\sigma_m^U e^{-\rho|z|/a} \end{aligned} \quad (5.128)$$

式中

$$\rho = \left[\frac{2G_mE}{c_mE_mE_f \ln(\bar{R}/a)} \right]^{1/2} \quad (5.129)$$

如果纤维与基体之间靠摩擦力连结, 上述结果仅仅当界面不产生滑移时才正确, 即

$$\tau_i^D(0) \leq \tau_s \quad (5.130)$$

或者

$$\sigma + (E/E_m)\sigma_m^I \leq \left(\frac{2c_f E}{\rho c_m E_m}\right)\tau_s \quad (5.131)$$

式中, τ_s 为界面滑移的临界剪应力。

b. 纤维与基体界面产生滑移情况

当方程(5.131)式不满足, 纤维与基体界面将产生滑移, 滑移长度为 l_s , 在该区域内, 可以得到

$$\begin{aligned} \sigma_f^D &= \frac{\sigma}{c_f} - 2\tau_s |z|/a \\ \sigma_m^D &= 2(c_f/c_m)\tau_s |z|/a \quad 0 \leq |z| \leq l_s \\ \tau_i^D &= \tau_s \end{aligned} \quad (5.132)$$

对于 $|z| \geq l_s$, 可以求得:

$$\begin{aligned} \sigma_f^D - \sigma_f^U &= \frac{2\tau_s}{\rho} e^{-\rho(|z|-l_s)/a} \\ \sigma_m^D - \sigma_m^U &= -\frac{2\tau_s}{\rho} (c_f/c_m) e^{-\rho(|z|-l_s)/a} \quad |z| \geq l_s \\ \tau_i^D &= \frac{z}{|z|} \tau_s e^{-(|z|-l_s)/a} \end{aligned} \quad (5.133)$$

根据 $|z|=l_s$ 处轴向应力连续条件, 可以建立

$$\frac{l_s}{a} = \frac{[\sigma + (E/E_m)\sigma_m^I] \left[\frac{c_m E_m}{c_f E}\right]}{2\tau_s} - \frac{1}{\rho} \quad (5.134)$$

通过(5.134)式可以确定界面的滑移长度 l_s , 当 $l_s=0$ 时, 结果显然同前一部分得到的结论一致。当 l_s/a 较大, (5.134)式中 $\frac{1}{\rho}$ 项较小。

c. 初始粘结, 在载荷作用下脱胶的纤维与基体界面

这种情况下, 关键问题是假定界面脱胶后就一直保持张开。假设脱胶长度为 l_d , 则 $0 \leq |z| \leq l_d$ 时

$$\begin{aligned} \sigma_f^D &= \sigma/c_f \\ \sigma_m^D &= 0 \\ \tau_i^D &= 0 \end{aligned} \quad (5.135)$$

对于 $|z| \geq l_d$ 情况, 结果同无滑移情况一样, 只是将 $|z|$ 用 $(|z| - l_d)$ 代替。与滑移情况不同的是, 在 $|z| = l_d$ 处, τ_i 具有不连续性。

4. 基体稳态开裂应力的计算

(1) 纤维与基体界面靠摩擦阻力控制情况

在这种情况下, 能量方程(5.117)式可以写成

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{c_f}{E_f} (\sigma_f^U - \sigma_f^D)^2 + \frac{c_m}{E_m} (\sigma_m^U - \sigma_m^D)^2 \right] dz \\ & + \frac{1}{2\pi R^2 G_m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^R (\tau_{rz}^D)^2 2\pi r dr dz = c_m \phi_m \end{aligned} \quad (5.136)$$

将(5.128)式代入(5.136)式, 可以导出当界面无任何滑移时确定基体稳态开裂应力 σ_{cr} 的方程

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^I}{E_m} = \left[\frac{c_f E_f \phi_m \rho}{a E_m E} \right]^{1/2} \quad (5.137)$$

其中, 式(5.137)左边第二项反映了残余应力的影响。在利用(5.129)式确定系数 ρ 时必须首先导出有效半径 $\bar{R}$ 。下面将依据实际受载方式的能量应等于等效受载方式的能量来确定 $\bar{R}$ 。

在剪滞法模型中(图 5.38(a))基体轴向平衡方程为

$$r \frac{\partial \sigma_m}{\partial z} + \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} = 0 \quad (5.138)$$

面边界条件为, $\tau_{rz}(a) = \tau_i$, $\tau_{rz}(R) = 0$, 为满足剪切边界条件, 可以假设剪应力的解为

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{\tau_i(z)}{a} \left(\frac{c_f}{c_m} \right) \frac{R^2 - r^2}{r} \quad (5.139)$$

代入(5.138)式中, 可以得到

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial z} = 2(c_f/c_m)(\tau_i/a) \quad (5.140)$$

(5.140)式表明基体中的轴向应力与 r 无关, 这与等效载荷得到的结论是一致的, 将(5.139)式代入前述的剪切能表达式中, 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{2(1+\gamma_m)}{E_m} \left(\frac{c_f}{c_m} \right)^2 \left[\left(\frac{R}{a} \right)^2 \ln \frac{R}{a} + 1 - \frac{3}{4} \left(\frac{R}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} \tau_i^2 dz \\ & \quad (5.141) \end{aligned}$$

式中, $(R/a)^2 = 1/c_f$ 。(5.136)式中剪切能的表达式可以写成

$$\frac{2c_f(1+\gamma_m)}{E_m} \ln \bar{R}/a \int_{-\infty}^{\infty} \tau_i^2 dz \quad (5.142)$$

比较(5.141)及(5.142)式,可以得到

$$\ln \frac{\bar{R}}{a} = - \frac{2 \ln c_f + c_m(3 - c_f)}{4c_m^2} \quad (5.143)$$

引入如下常量 B

$$B = \left(\frac{c_m}{6 \ln \bar{R}/a} \right)^{1/4} \quad (5.144)$$

ρ 的表达式可以写成

$$\rho = \frac{B^2}{c_m} \left[\frac{6E}{E_f(1+\gamma_m)} \right]^{1/2} \quad (5.145)$$

因此, (5.137)式可以写成如下形式

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^1}{E_m} = \frac{\sigma_0}{E} \quad (5.146)$$

式中

$$\frac{\sigma_0}{E} = B \left[\frac{6c_f^2 E_f}{c_m^2 E(1+\gamma_m)} \right]^{1/4} \left[\frac{\varphi_m}{a E_m} \right]^{1/2} \quad (5.147)$$

式中, 参数 B 随纤维体积含量 C_f 的变化曲线如图 5.39 所示。

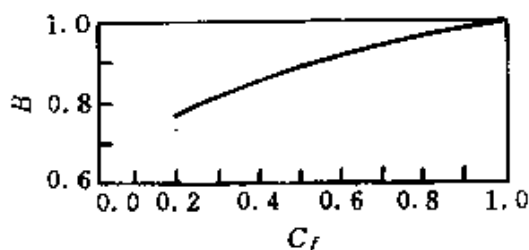


图 5.39 参数 B 随纤维体积含量变化曲线^[31]

当纤维与基体界面产生滑移, 且滑移长度 $l_s \gg a$ 时, 可以忽略 $|z| > l_s$ 区域中释放的能量, 并得到如下结果

$$\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^2}{E_m} = \frac{\sigma_1}{E} \quad (5.148)$$

式中

$$\frac{\sigma_1}{E} = \left[\frac{6c_f^2 E_f \tau_i}{c_m E_m E} \right]^{1/3} \left[\frac{\varphi_m}{a E_m} \right]^{1/3} \quad (5.149)$$

在纤维与基体界面产生滑移, 但滑移量 l , 又不很大情况下, 必须将全区 (5.132) 及 (5.133) 式代入能量方程, 可以得到如下公式:

$$\frac{\sigma_{cr} + (E/E_m)\sigma_m^I}{\sigma_0} = \left(\frac{Y}{3}\right)\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^3 \quad (5.150)$$

式中

$$Y = \left(\frac{\sigma_{cr}}{E} + \frac{\sigma_m^I}{E_m}\right) \left(\frac{c_m E_m \rho}{2c_f \tau_s}\right) \quad (5.151)$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) = \left(\frac{27}{Y^3 + 3Y - 1}\right)^{1/6}$$

当 $Y > 1$ 时, $(\sigma_{cr} + E/E_m)\sigma_m^I/\sigma_0$ 随 σ_1/σ_0 变化曲线如图 5.40 所示。

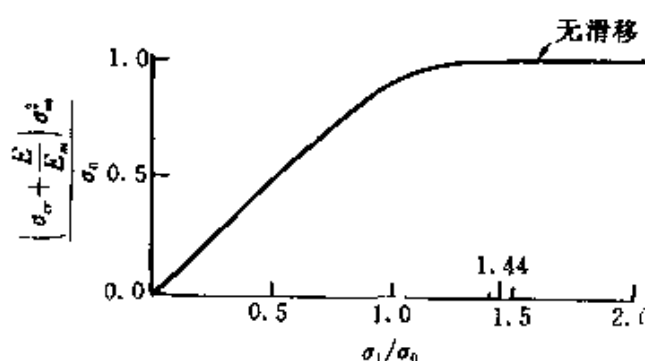


图 5.40 基体稳态开裂应力计算曲线^[31]

(2) 纤维与基体界面在外载作用下脱胶并张开情况

利用 (5.118) 式, 可以将能量方程写成

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c_f}{E_f} (\sigma_f^U - \sigma_f^D)^2 + \frac{c_m}{E_m} (\sigma_m^U - \sigma_m^D)^2 \right\} dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi R^2 G_m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^R \left(\frac{a \tau_i^D}{r} \right)^2 2\pi r dr dz = c_m \varphi_m + 4c_f (l_d/a) \varphi_d \quad (5.152)$$

由此, 可以建立确定基体稳态开裂应力 σ_{cr} 的方程如下:

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} = \left\{ \frac{1 + \frac{4c_f}{c_m} \cdot \frac{l_d}{a} \cdot \frac{\varphi_d}{\varphi_m}}{1 + \frac{\rho l_d}{a}} \right\}^{1/2} - \left(\frac{E}{E_m} \right) \cdot \frac{\sigma_m^I}{\sigma_0} \quad (5.153)$$

为了计算 σ_{cr} , 必须首先确定 l_d , 下面仍利用能量方法再结合剪滞法分析来确定。

可以认为裂纹尖端的纤维与基体界面产生脱胶, 主要由于裂纹尖端产生的横向拉应力 σ_x 所致。取出一单元体(图 5.41), 纤维

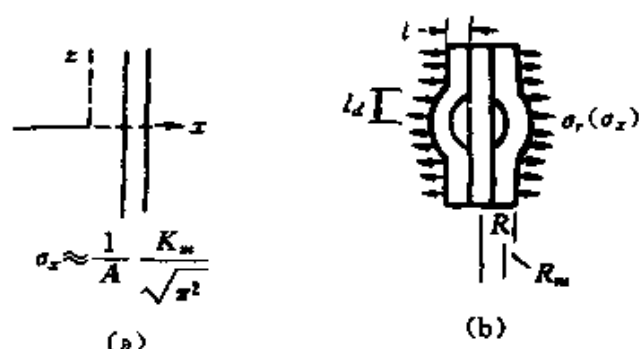


图 5.41 纤维与基体界面脱胶模型

外包裹一层基体, 在环向拉伸应力 σ_x 或 σ_r 作用下, 根据断裂力学, σ_r 由下式确定

$$\sigma_r(z) = \frac{K_m}{4 \sqrt{\pi |z|}} \quad (5.154)$$

式中, $K_m = [E_m \varphi_m / (1 - \gamma_m^2)]^{1/2}$ 为基体材料的临界应力强度因子。其单元体的几何参数为

$$\begin{aligned} t &= R - a = a(c_f^{-1/2} - 1) \\ R_m &= \frac{1}{2}(R + a) = \frac{a}{2}(c_f^{-1/2} + 1) \end{aligned} \quad (5.155)$$

利用剪滞法可以建立 $r = R_m$ 处径向位移 $U(z)$ 的微分方程,

$$-G_m t \frac{d^2 U}{dz^2} + \left[\frac{E_m t}{R_m^2 (1 - \gamma_m^2)} \right] U = \sigma_r(z) \quad (5.156)$$

其边界条件为 $U(\pm l_d) = 0$ 。纤维与基体界面开裂 l_d 长, 基体中的

能量释放率为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{l_d} \sigma_r(z) U(z) dz \quad (5.157)$$

可以认为,释放的能量全部用于产生界面开裂,这样,可以建立确定 l_d 的能量关系为

$$2\pi a \varphi_d = \frac{\partial V}{\partial l_d} \quad (5.158)$$

可以得到

$$l_d/a = (1 + \sqrt{c_f}) \left(\frac{1 - \gamma_m}{8c_f} \right)^{1/2} x \quad (5.159)$$

$$\varphi_d/\varphi_m = \frac{(1 + \sqrt{c_f})^2}{128\pi c_f} \left[\frac{2}{c_f(1 - \gamma_m)} \right]^{1/2} Q(x)$$

式中

$$Q(x) = \left\{ \frac{\int_0^x \frac{\cosh s ds}{\sqrt{s}}}{\cosh x} \right\}^2 \quad (5.159)'$$

图 5.42 绘出了 $Q(x)$ 随 x 变化曲线,图 5.43 绘出了相对于不同纤维体积含量情况,界面开裂长度随界面断裂韧性变化曲线,很明显,曲线的上半部分对应于稳定解。从图 5.42 中可以发现,当 $x^* = 0.9204$ 时, Q^* 达到最大值 2.061。当 $Q > Q^*$ 时,很显然,界面开裂不可能发生,据此可以确定为防止界面脱胶,界面断裂韧性所必然满足的条件,这一临界值随纤维体积含量变化曲线如图 5.44 所示。这样可以最终得到计算基体稳态开裂应力的方程为

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} + \frac{E}{E_m} \cdot \frac{\sigma_m^I}{\sigma_0} = \left\{ \frac{1 + \frac{4c_f}{c_m} \left(\frac{l_d}{a} \right) \left(\frac{\varphi_d}{\varphi_m} \right)}{1 + \frac{B^2}{c_m} \left[\frac{6E}{(1 + \gamma_m)E_f} \right]^{1/2} \left(\frac{l_d}{a} \right)} \right\}^{1/2} \quad (5.160)$$

当 $\varphi_d/\varphi_m > (\varphi_d/\varphi_m)^*$ 时,界面不会产生开裂,基体稳态开裂应力较

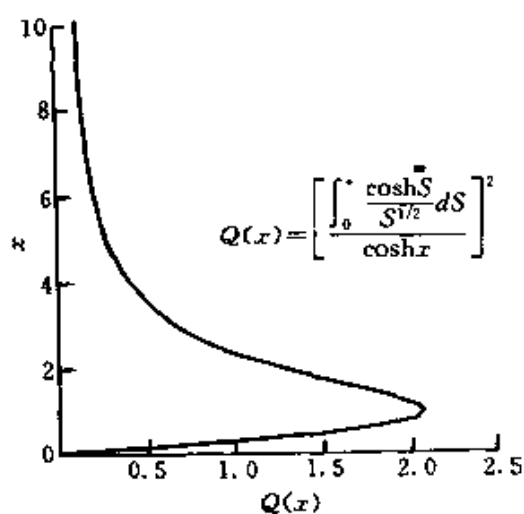


图 5.42 界面脱胶长度随开裂韧性变化曲线^[31]

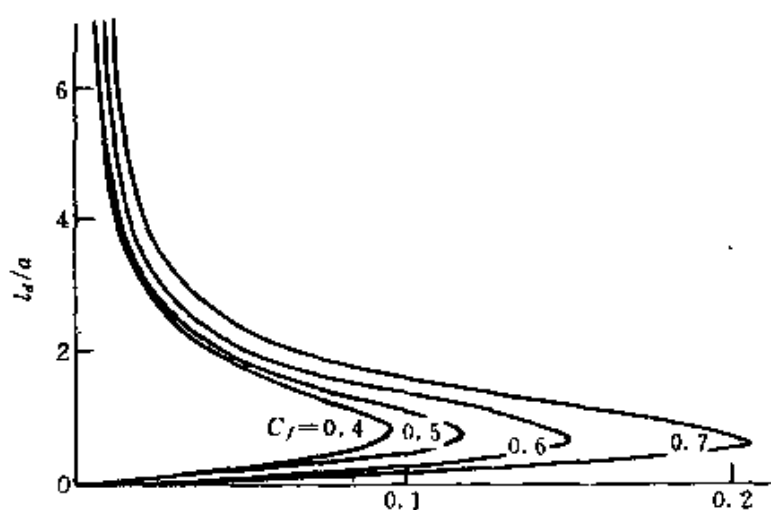


图 5.43 不同纤维体积含量下,脱胶长度变化曲线^[31]

高,而 $\varphi_d/\varphi_m < (\varphi_d/\varphi_m)^*$ 时,界面将产生开裂,这样,基体的稳态开裂应力下降较多(图 5.45)。

5. 实验验证

利用 Marshall 及 Evans (1985)^[32] 关于碳化硅纤维增强 lithium-alumino-silicate glass 基体复合材料,其材料常数为

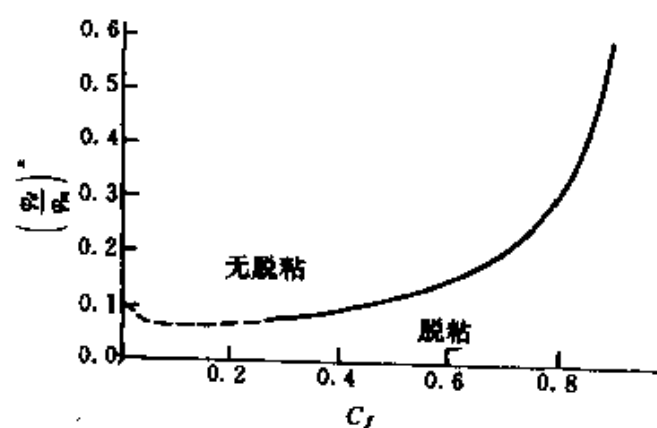


图 5.44 临界界面开裂韧性随纤维体积含量变化曲线^[31]

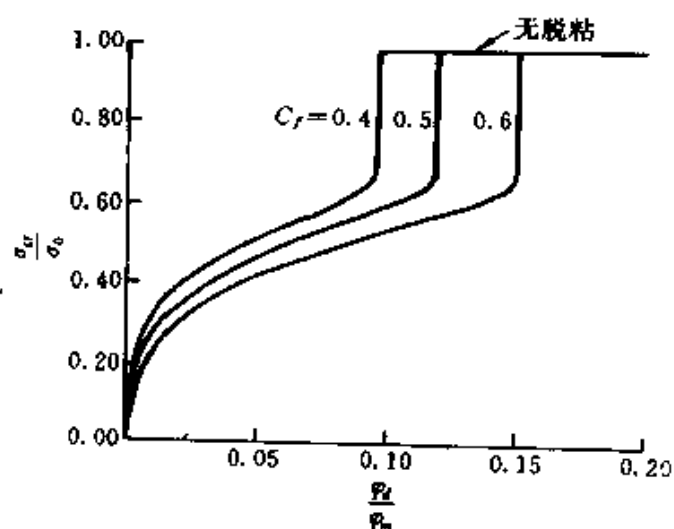


图 5.45 基体稳态开裂强度随界面韧性变化曲线^[31]

$$\begin{aligned}
 & c_f = 0.5 \\
 & \left. \begin{aligned} E_m &= 85 \text{ GPa} \\ E_f &= 200 \text{ GPa} \end{aligned} \right\} E = 142.5 \text{ GPa} \\
 & \gamma_m = 0.25 \\
 & a = 8.0 \times 10^{-6} \text{ m} \\
 & K_m = 2.0 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$\varphi_m = 44 \text{ N/m} (= K_m^2 (1 - \gamma_m^2) / E_m)$$

$$\tau_s \approx 2.0 \text{ MPa}$$

由此,可以求得, $\sigma_0 = 1625 \text{ MPa}$, $\sigma_1 = 265 \text{ MPa}$, $\sigma_1/\sigma_0 = 0.16$ 。这相当于滑移长度较大情况,因此,基体稳态开裂应力预报公式为

$$\sigma_{cr} = \sigma_1 + \left(\frac{E}{E_m}\right) \sigma_m^I \approx 265 + 1.676 \sigma_m$$

而实验值为

$$\sigma_{cr} = 290 \pm 20 \text{ MPa}$$

很显然,材料中存在着较大的残余应力 σ_m^I ,这也被实验所证实。

§ 5.2.2 确定基体开裂应力的桥联模型

在上一部分中,我们详尽介绍了利用能量法导出脆性基体稳态开裂应力的计算公式,这一公式只有当裂纹扩展了相对比较长的距离才比较适用。在裂纹扩展还未达到稳定阶段,裂纹面上未断裂的纤维限制了裂纹的张开,从而起到了降低裂纹尖端应力强度因子的增韧作用。为计算这一阶段基体的开裂应力,人们一般采用有效应力强度因子而不用能量法,因为这种情况下,直接计算应力强度因子比计算由于裂纹扩展而释放的能量更方便。为了计算基体开裂应力,或有效应力强度因子,一般均采用如下三个步骤。(1)首先必须导出裂纹表面未断裂的桥联纤维承担的载荷与裂纹张开位移之间定量的关系,由于纤维及基体界面会产生滑移,这一关系一般不等同于纤维本身的拉伸载荷-位移曲线。(2)利用已经得到的纤维承担的载荷与裂纹张开位移之间的关系,利用数值方法迭代求得在某一外载作用下裂纹的张开位移及裂纹面上纤维所承担的载荷。(3)考虑纤维所承担的桥联载荷。利用断裂力学方法计算有效应力强度因子及基体开裂临界应力。这一领域的工作吸引了许多杰出科学家,可见参考文献[33]~[37]。其中,Marshall及Cox等^[33]还考虑到当纤维强度较低,在裂纹未达到稳定扩展之前,其尾部桥联纤维可能已经断裂,这将导致材料的整体破坏,从而使得复合材料的破坏模式发生由非突发性破坏向突发

性破坏转化。下面,我们将首先不考虑纤维破坏这一模式,利用桥联模型导出基体的开裂应力,然后,再考虑纤维的强度分布对复合材料破坏行为的影响。

1. 纤维承担的载荷与裂纹张开位移的关系

考虑复合材料中含有的一裂纹(图 5.46),在沿纤维方向的单

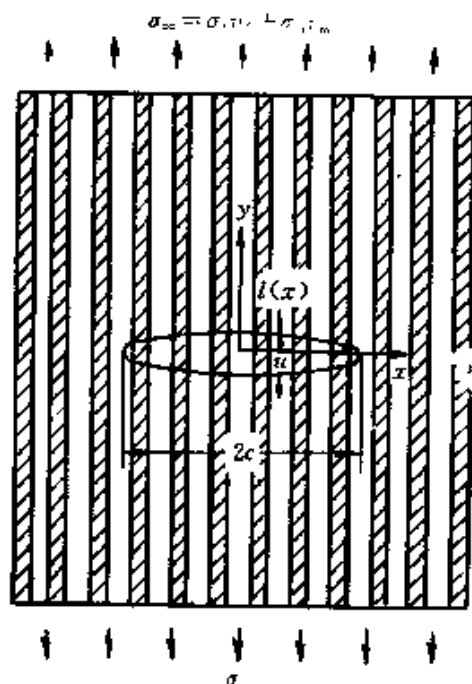


图 5.46 复合材料中的裂纹

轴拉伸载荷 σ_∞ 作用下,裂纹中的纤维并未断裂,而是起到了增韧的作用,限制了裂纹的张开。复合材料所受的载荷与纤维及基体承担的载荷 σ_f 及 σ_m 之间关系为

$$\sigma_\infty = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m \quad (5.161)$$

式中, v_f 及 v_m 分别为纤维及基体的体积含量。由于纤维、基体及复合材料发生的轴向变形应相同,因此

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{\sigma_\infty}{E_c} \quad (5.162)$$

结合(5.161)式及(5.162)式可以得到纤维所承担的载荷

$$\sigma_f = \frac{E_f \sigma_\infty}{E_m v_m (1 + \eta)} \quad (5.163)$$

式中, $\eta = E_f v_f / (E_m v_m)$.

图 5.47 是为计算裂纹表面纤维所承担的载荷而取出的材料

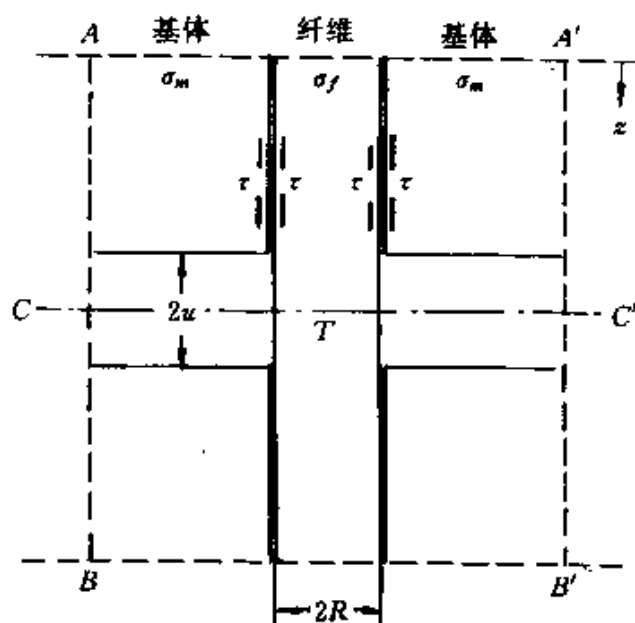


图 5.47 作用于裂纹表面的桥联纤维

单元。其中, AA' 及 BB' 为纤维及基体界面滑移部分的端点, 在 AA' 面之上及 BB' 面以下纤维及基体中应力为远场应力, 不因裂纹的存在而改变。并且进一步假设, 在滑移部分, 纤维与基体界面有一常量摩擦阻力 τ , 其方向与滑移方向相反。由于在 AA' 面上纤维承担的应力由 (5.163) 式确定, 这样, 在任一位置 z 处, 纤维所承担的应力为

$$\sigma_f(z) = \sigma_f + \frac{2\pi R \tau z}{A_f} \quad (5.164)$$

式中, R 为纤维半径, $A_f = \pi R^2$ 为纤维横截面积。纤维所承担应力在裂纹面上 ($z=l$), 为

$$T = \sigma_f(l) = \sigma_f + \frac{2\tau l}{R} \quad (5.165)$$

可以导出, 在滑移段纤维的应变分布为

$$\epsilon_f(z) = \frac{d\delta_f(z)}{dz} = \frac{\sigma_f}{E_f} + \frac{2\tau z}{RE_f} \quad (5.166)$$

式中, $\delta_f(z)$ 为 z 处纤维的位移。这样, 在裂纹面上 $z=l$ 处, 纤维的位移为

$$\delta_f = \delta_f(l) = \frac{\sigma_f}{E_f}l + \frac{\tau}{RE_f}l^2 \quad (5.167)$$

类似地可以假设围绕滑移纤维的基体中应力也是呈线性变化的, 当 z 由 0 增至 l 时, 基体中应力由远场平均应力减至 0, 即

$$\sigma_m(z) = \sigma_m(1 - \frac{z}{l}) \quad (5.168)$$

因此, 基体中应变分布为

$$\epsilon_m(z) = \frac{\sigma_m}{E_m}(1 - \frac{z}{l}) \quad (5.169)$$

这样, 裂纹表面的基体相对于 AA' 面的位移为

$$\delta_m = \delta_m(l) = \frac{\sigma_m l}{2E_m} \quad (5.170)$$

因此, 裂纹的张开位移可写成

$$\begin{aligned} u = \delta_f - \delta_m &= \frac{\sigma_f}{E_f}l + \frac{\tau}{RE_f}l^2 - \frac{\sigma_m}{2E_m}l \\ &= \frac{\tau}{RE_f}l^2 + \frac{\sigma_\infty}{2E_mv_m(1+\eta)}l \end{aligned} \quad (5.171)$$

而且, 滑移长度 l 也可由 (5.171) 式确定为

$$l = \frac{\eta\sigma_\infty R}{4(1+\eta)v_f\tau} \left\{ \left[1 + \frac{16(1+\eta)^2 E_f v_f^2 \tau u}{\eta^2 \sigma_\infty R} \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad (5.172)$$

将 (5.172) 式代入 (5.165) 式得到裂纹表面纤维施加的桥联载荷同裂纹张开位移 u 之间的关系

$$p = Tv_f = \frac{\eta\sigma_\infty}{2(1+\eta)} \left\{ \left[1 + \frac{16(1+\eta)^2 E_f v_f^2 \tau u}{\eta^2 \sigma_\infty R} \right]^{1/2} + 1 \right\} \quad (5.173)$$

为了方便, 可以将 (5.173) 式写成无量纲形式

$$\frac{p}{\sigma_\infty} = \frac{\eta}{2(1+\eta)} \left\{ \left[1 + \frac{4(1+\eta)u}{\eta^2 u_0} \right]^{1/2} + 1 \right\} \quad (5.173)'$$

式中

$$u_0 = \frac{\sigma_\infty^2 R}{4(1 + \eta)E_f v^2 \gamma \tau} \quad (5.174)$$

图 5.48(a)绘出不同 η 值下, p/σ_∞ 随 u/u_0 变化曲线。

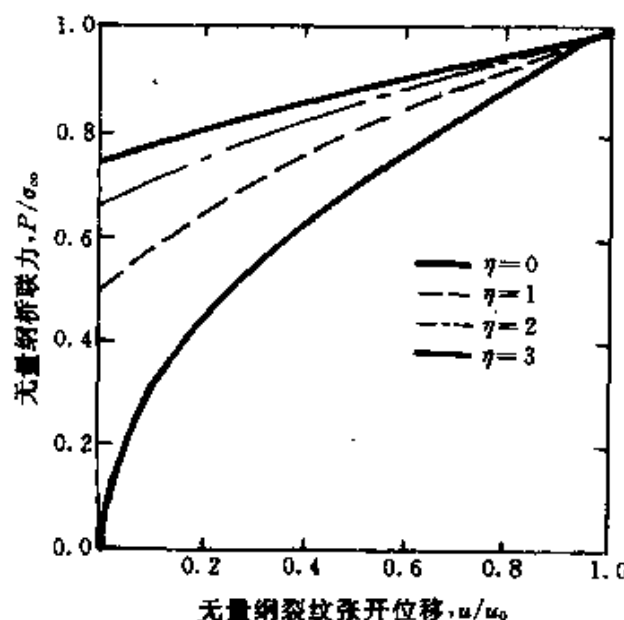


图 5.48(a) 纤维中的桥联力随裂纹张开位移之间关系^[35]

方程(5.173)'式可以退化到稳态基体开裂情况,当 $p \rightarrow \sigma_\infty$ 时, $u \rightarrow u_0$,这是稳态开裂的解,

$$\sigma_\infty = p = \left[\frac{4(1 + \eta)E_f v^2 \gamma \tau u_0}{R} \right]^{1/2} \quad (5.175)$$

因此,这种情况下得到的稳态开裂应力为一下限值。

2. 有效应力强度因子及基体开裂应力

为了计算裂纹尖端有效应力强度因子及基体横向开裂应力,必须求得桥联纤维对裂纹所施加的闭合载荷 p ,而为了求得 p ,必须首先确定裂纹张开位移 u ,根据断裂力学理论^[42],裂纹张开位移可以表示成

$$u(x) = \frac{4(1 - \gamma^2)c}{\pi E'} \int_x^1 \frac{S}{(S^2 - x^2)^{1/2}} \int_0^S \frac{\sigma_\infty - p(t)}{(S^2 - t^2)^{1/2}} dt dS \quad (5.176)$$

式中, c 为裂纹半长, E' 为等效弹性常数, 对于单向纤维增强复合材料, 其弹性柔度分量为 $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{66}$, 则

$$\frac{1}{E'} = \left(\frac{a_{11}a_{22}}{2}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^{1/2} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}}\right]^{1/2} \quad (5.177)$$

将(5.173)式代入(5.176)式中, 利用数值迭代方法可解得当外载为临界开裂值时裂纹的张开位移及桥联纤维所产生的桥联载荷, 如图 5.48(b)及图 5.49 所示。

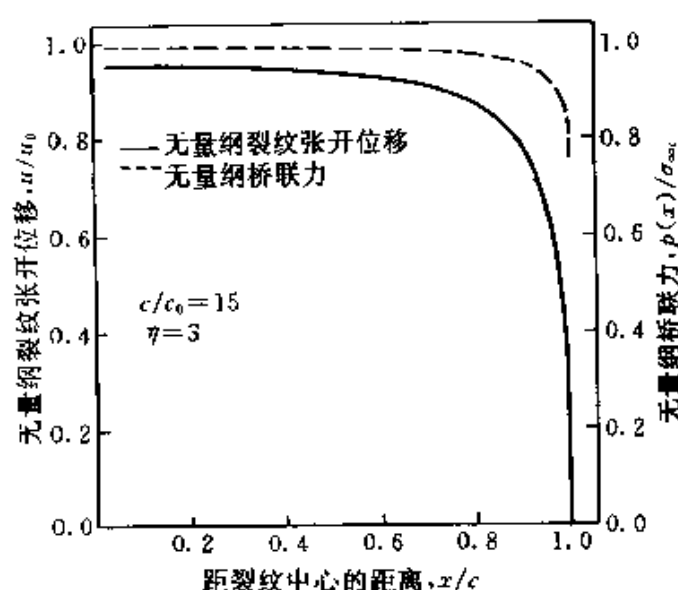


图 5.48(b) 当外载为临界开裂值时, 裂纹的张开位移及桥联力^[35]

求得未断裂纤维产生的桥联力后, 利用叠加原理可以得到裂纹尖端的有效应力强度因子为

$$K = 2\left(\frac{c}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^1 \frac{\sigma_\infty - p(x)}{(1-x^2)^{1/2}} dx \quad (5.178)$$

令有效应力强度因子等于基体材料断裂韧性指标 K_{IC} , 可以得到基体开裂的临界应力

$$K = K_{IC} \quad (5.179)$$

其计算结果如图 5.50 所示。从图中可以发现, 当裂纹长度增加时, 基体开裂应力趋于其稳态值。

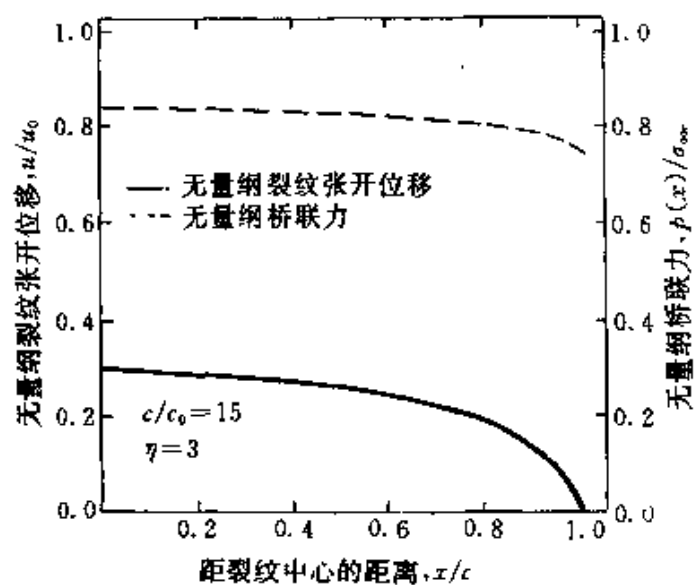


图 5.49 裂纹表面张开位移及桥联力变化曲线^[45]

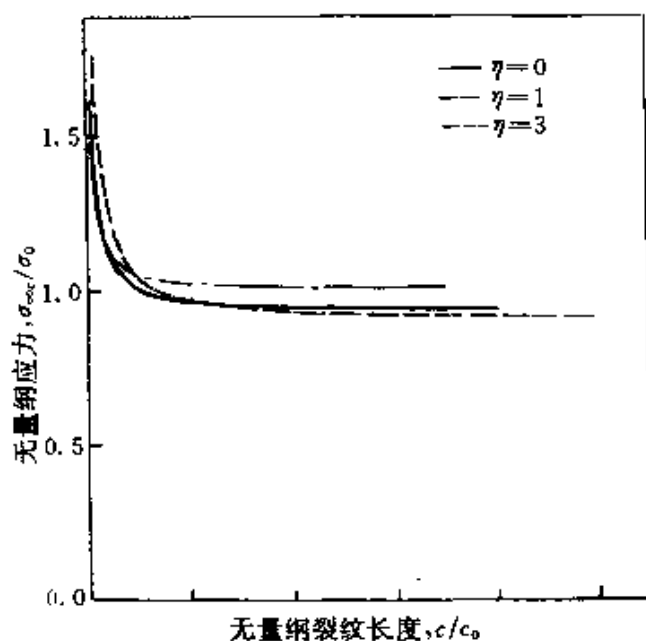


图 5.50 基体临界开裂应力随裂纹长度变化曲线^[35]

在稳态开裂情况下,纤维所承担的桥联载荷趋近于外加载荷 σ_∞ ,而张开位移趋于极限值 u_0 ,其应变能释放率可以写成

$$G_c^s = 2\sigma_\infty u_0 - 2 \int_0^{u_0} p(u) du \quad (5.180)$$

式中,第1项表示当外力扩展单位面积时,外力所作的功,第2项为桥联的纤维所作的负功。将 $p(u)$ 表达式(5.173)'及 u_0 表达式(5.174)式代入上式中,可以得到

$$G_c^s = \frac{\sigma_{\infty}^3 R (3\eta + 2)}{12(1 + \eta)^3 E_f v_f^2 \tau} \quad (5.181)$$

利用断裂准则

$$G_c^s = 2v_m \gamma_m \quad (5.182)$$

可以得到

$$\sigma_{\infty}^s = \left[\frac{12(1 - \gamma^2) k_{cm}^2 \tau E_f v_f^2 v_m (1 + \eta)^3}{R E_m (3\eta + 2)} \right]^{1/3} \quad (5.183)$$

同前文利用能量法导出的基体稳态开裂应力 σ_0 相比,可以得到

$$\frac{\sigma_{\infty}^s}{\sigma_0} = \left[\frac{2(1 + \eta)}{3\eta + 2} \right]^{1/3} \quad (5.184)$$

所得到的计算结果与 silicon carbide-lithium aluminosilicate 复合材料的试验结果的比较示于图 5.51 中。

3. 纤维强度分布对复合材料破坏机理的影响

在前面研究的脆性基体复合材料中,一般认为纤维的强度较高,其破坏模式表现为基体大规模横向开裂,而后复合材料基本上由纤维束承载,这种破坏方式为非突发性破坏。然而,如果纤维强度有限,随着基体的开裂,裂纹将进一步张开,这样,导致作用于裂纹面上的桥联纤维受载较大。因此,在基体还未达到稳态开裂状态之前,部分纤维可能已经发生断裂,这样,有可能导致复合材料由非突发性破坏转化为工程中不愿看到的突发性破坏,Marshall 及 Cox^[33],Cox et al.^[34]等详细研究了由于纤维强度的不同而导致复合材料破坏机理的变化。为了简化,如下我们认为纤维强度为一确定值而不是一随机变量,来研究对复合材料破坏机理的影响。

考虑单向纤维增强复合材料中含有一圆币状裂纹,其半径为 c ,图 5.52,复合材料承受垂直于裂纹面的均匀拉伸载荷 σ_∞ 。距离裂纹尖端为 d 的范围内的纤维并未断裂,而裂纹内其它部分,半

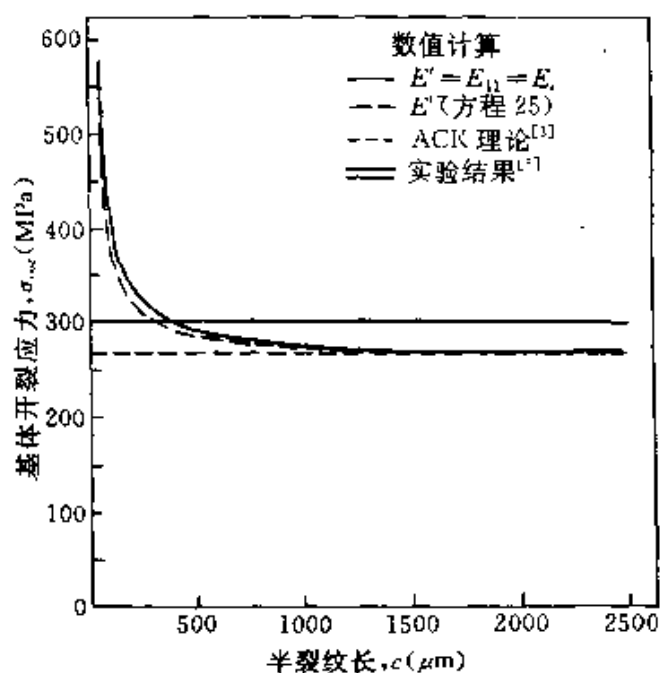


图 5.51 基体开裂应力的理论预报值同实验值比较^[35]

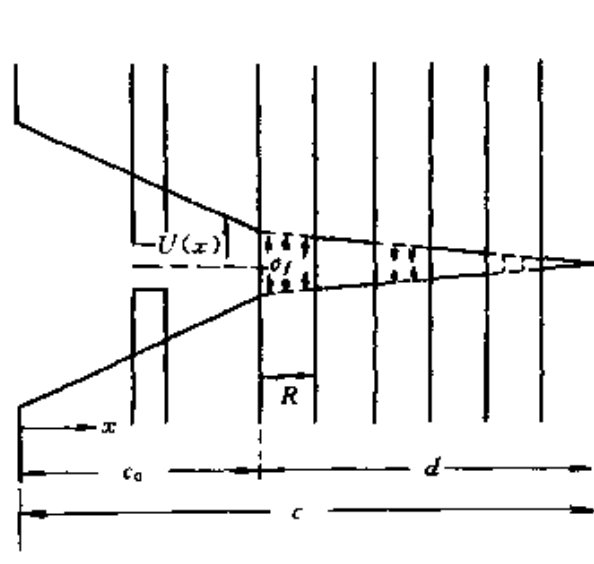


图 5.52 含有部分桥联纤维的裂纹尖端模型

径为 c_0 范围内的纤维已经断裂,这时,复合材料的破坏既可能由基体的进一步开裂而产生,也可能由桥联纤维进一步断裂而产生。

作为(5.173)'及(5.174)式的简化形式,桥联纤维中的载荷与裂纹张开位移 $u(x)$ 之间关系可写成

$$p(x) = \begin{cases} \alpha \sqrt{u(x)} & x > c_0 \\ 0 & x < c_0 \end{cases} \quad (5.185)$$

式中

$$\alpha = \left[\frac{4rv_f^2 E_f E_c}{RE_m (1 - v_f)} \right]^{1/2} \quad (5.185)'$$

等式(5.185)相应于纤维界面滑移较大情况。

应力强度因子可表示成

$$K = 2(c/\pi)^{1/2} \int_0^1 \frac{[\sigma_\infty - p(X)]X dX}{\sqrt{1 - X^2}} \quad (5.186)$$

式中, $X = x/c$ 。因此,基体开裂的临界条件为

$$K = K_m^c E_c / E_m = K^c \quad (5.187)$$

式中, K_m^c 为基体开裂临界应力强度因子。设纤维强度为 S , 则纤维断裂的准则为

$$\Sigma_\infty \sqrt{U(c_0)} = v_f S / \sigma_n \quad (5.188)$$

式中, $\Sigma_\infty = \sigma_\infty / \sigma_n$, $U = u / u_n$, $C = c / c_n$, 且

$$\begin{aligned} \sigma_n &= [3\alpha^2 K_c^2 (1 - \gamma^2) / E_c]^{1/3} \\ c_n &= (\pi/4) [9E_c K^c / \alpha^2 (1 - \gamma^2)]^{2/3} \\ u_n &= \alpha_n^2 / \alpha^2 \end{aligned} \quad (5.189)$$

通过数值求解方程(5.187)及(5.188)式可以得到相应于不同的纤维强度 $v_f S / \sigma_n$ 及不同桥联长度的基体开裂应力及纤维断裂应力,其结果如图 5.53 所示。

当无任何桥联纤维断裂的条件下,使纤维发生断裂及使基体产生开裂的外加应力如图 5.54 所示。从图中可以发现,当无量纲纤维强度 $v_f S / \sigma_n$ 大于 0.794 时,首先会发生基体的非稳态开裂。如果初始裂纹较大,基体开裂将继续下去而纤维不发生断裂。然而,当初始裂纹较小,伴随着基体的开裂纤维也会发生断裂,从而导致复合材料发生突发性断裂。当纤维无量纲强度小于 0.794 时,

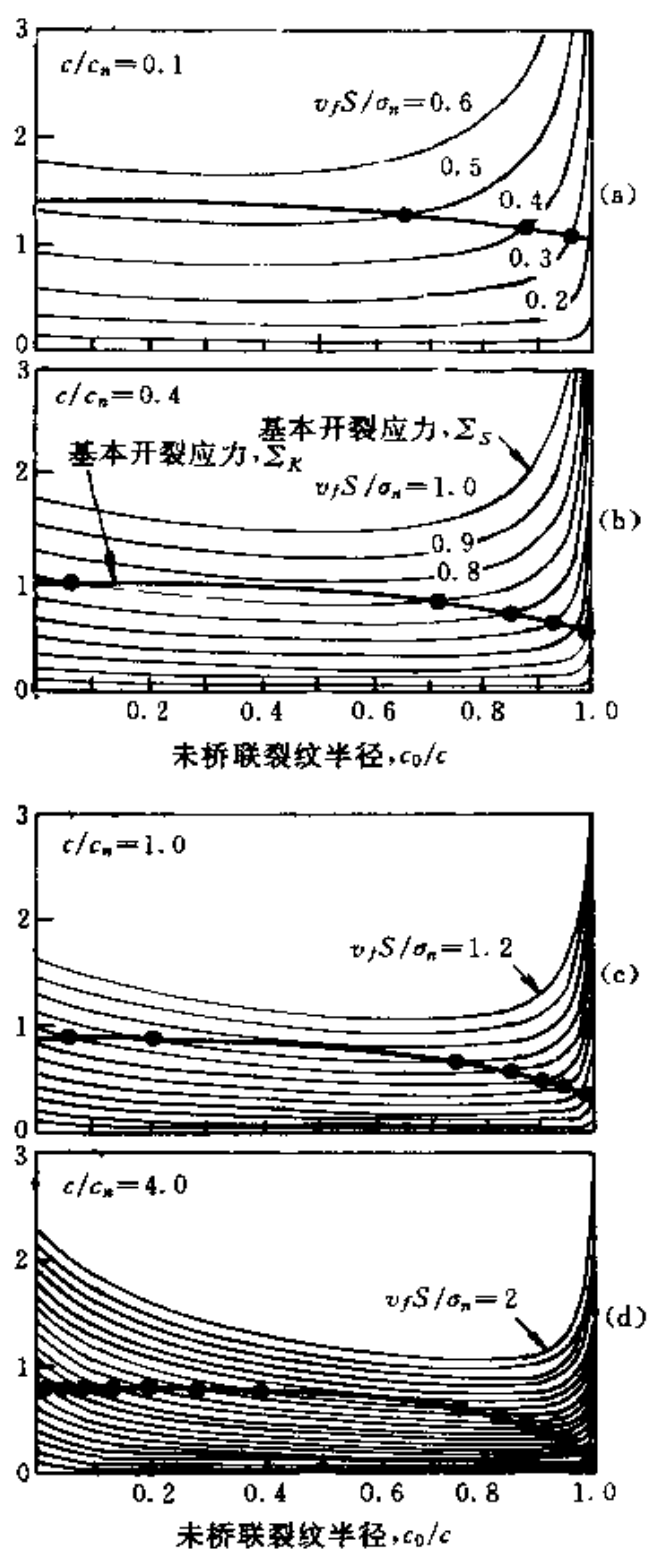


图 5.53 相应于不同纤维强度 $v_f S / \sigma_n$ 及不同桥联长度 c_0/c , 使纤维产生断裂及使基体产生开裂的宏观外加应力值^[33]

破坏机理较为复杂,如图 5.55 所示。一种可能是纤维首先发生非稳态断裂 $A \rightarrow B$,然后,紧接着是基体及纤维共同破坏。另一种可能是纤维的非稳态破坏 $A \rightarrow B$,紧接着是纤维的稳态开裂 $B \rightarrow D$ 。

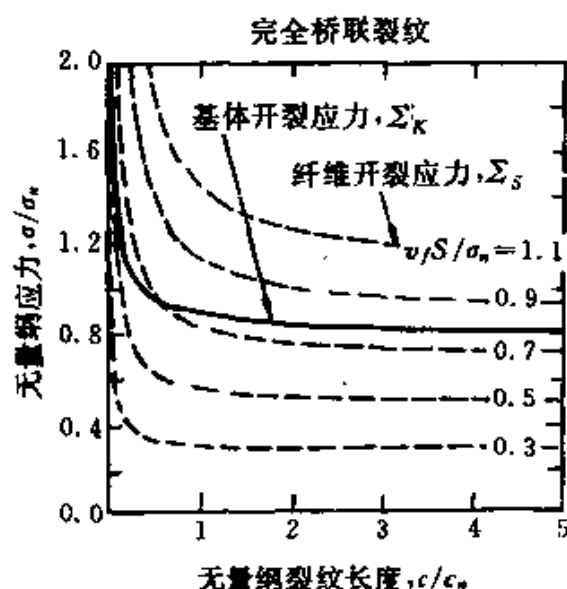


图 5.54 无任何桥联纤维断裂的条件下($c_0=0$),使桥联纤维开始断裂及基体开始开裂的外加载荷值^[33]

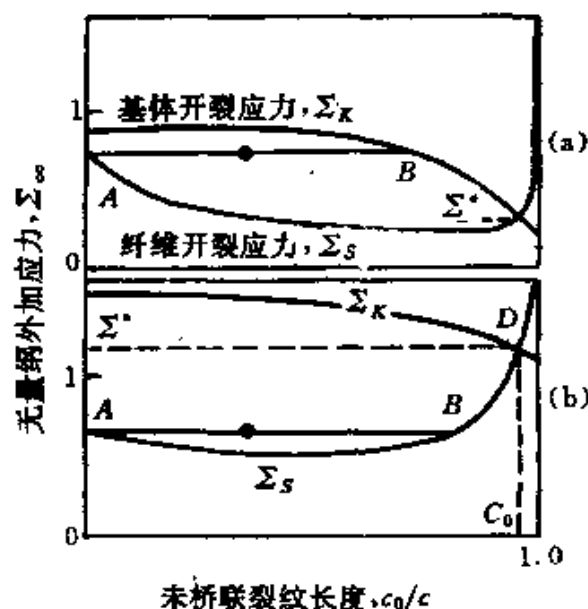


图 5.55 根据图 5.54,复合材料不同破坏机理之间转换图^[33]

通过上面的分析可以发现,无论是采用应力强度因子方法还是采用能量方法来计算复合材料的基体开裂应力及断裂应力,得到的结果基本上是一致的。上面所述的纤维对脆性基体增韧效果的分析构成了 80 年代中后期以来细观力学最热门的研究课题之一,也是材料学家同力学家一起合作得到的结果,在这些理论的指导下,人们不仅成功地研制成功了多种高韧性陶瓷基复合材料,而且又提出了许多新问题,极大地丰富了力学学科。

§ 5.3 复合材料断裂的统计细观力学模型

在前面几节中讨论的问题一般都是限于脆性及韧性较低的基体复合材料,这样,即使增强相不发生断裂,裂纹也可能绕过它们而导致基体的破坏。然而如果当基体的断裂韧性也较高,或者在裂纹的扩展路径上有一些具有较高强度的止裂点,裂纹为了扩展必须首先克服这些阻力。本节主要针对这样的断裂机制,建立预报裂纹开裂载荷的模型。考虑如图 5.56 所示非均匀材料中含有一裂纹,在外加载荷 σ 的作用下的稳态及非稳态扩展问题。由于组分材料性能的随机性及裂纹尖端材料结构的随机性,裂尖在不同位置的扩展阻力是一随机变量,那么如何确定在给定载荷及裂纹初始长度的条件下,裂纹扩展长度的分布以及裂纹失稳扩展的条件是问题的关键。我们首先引入如下假设来建立裂纹扩展的统计学模型。

(1) 设外载为 σ 时,裂纹长度为 x ,那么当外载增加至 $\sigma + \Delta\sigma$ 时,尖端处于 x 处的裂纹启动开裂的概率为 $\Lambda(x, \sigma)\Delta\sigma$;

(2) 当外载由 σ 增至 $\sigma + \Delta\sigma$ 时,裂纹并未启动开裂的概率为 $1 - \Lambda(x, \sigma)\Delta\sigma$;

(3) 在裂纹已经启动的条件下,裂纹自发地由 x 扩展至 $[y, y + \Delta y]$ 段的概率为 $\langle y | x \rangle \Delta y$ 。

在上述假设下,当外载为 $\sigma + \Delta\sigma$ 时裂纹长度在 $[y, y + \Delta y]$ 段的概率 $P(y, \sigma + \Delta\sigma)$ 可以同外载为 σ 时裂纹长度的分布 $P(x, \sigma)$ 建

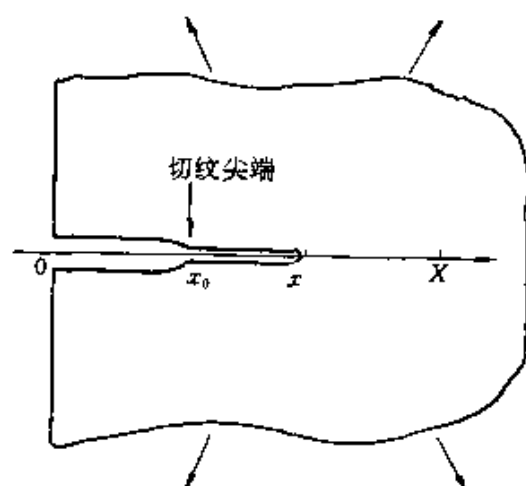


图 5.56 复合材料中裂纹扩展示意图

立如下关系：

$$P(y, \sigma + \Delta\sigma) = \int_{x_0}^y < y|x > \Delta y \wedge (x, \sigma) \Delta\sigma f(x, \sigma) dx + [1 - \wedge(y, \sigma) \Delta\sigma] P(y, \sigma) \quad (5.190)$$

式中，裂纹尖端处于区间 $[y, y + \Delta y]$ 中的概率 $P(y, \sigma)$ 可表示成

$$P(y, \sigma) = f(y, \sigma) \Delta y \quad (5.191)$$

式中， $f(y, \sigma)$ 为载荷为 σ 时，裂纹尖端在 y 处的概率密度函数。将(5.191)式代入(5.190)式中，可以得到如下方程：

$$\frac{\partial f(y, \sigma)}{\partial \sigma} = \int_{x_0}^y < y|x > \wedge (x, \sigma) f(x, \sigma) dx - \wedge(y, \sigma) f(y, \sigma) \quad (5.192)$$

式中， x_0 为裂纹的初始长度。方程(5.190)式的导出主要基于这样的考虑：当外载为 $\sigma + \Delta\sigma$ 时，裂纹尖端处于区间 $[y, y + \Delta y]$ 中的事件只能由如下二类事件演化而来。一是当外载为 σ 时，裂纹尖端的位置处于某一区间 $[x, x + \Delta x]$ 中，而当 σ 增加 $\Delta\sigma$ 时，裂纹在这时开始开裂，并自发地扩展至 $[y, y + \Delta y]$ 区间内；(5.190)式中第一项即为这一事件的概率。另一类事件是，当外载为 σ 时，裂纹尖端已经处于区间 $[y, y + \Delta y]$ 中，而当 σ 增加 $\Delta\sigma$ 时，裂纹在此区间内并未启动开裂，(5.190)式中的第二项即为这一事件的概率。

方程(5.192)式中的参数均可依据不同的材料细观结构来确定。但作为积分-微分方程,方程(5.192)式是比较难以求解的,如下,我们将依据实际情况对方程(5.192)式进行简化处理。

设在裂纹扩展路径的任一点 z ,裂纹被止裂的概率为 $U(z)$,而在 z 处止裂点总的密度为 $\lambda(z)$,那么,使裂纹在 z 处被止裂的平均阻点密度为 $\lambda(z)U(z)$ 。如果设以 $\lambda(z)U(z)$ 为密度函数的阻点沿裂纹扩展路径服从于Poisson分布,那么,裂纹由 x 点被启裂后,在 $x \leq z \leq y$ 区间内未被止住,而在 $y \leq z \leq y + \Delta y$ 区间内被止裂的事件相当于在 $x \leq z \leq y$ 中不出现阻点,而在 $y \leq z \leq y + \Delta y$ 中至少出现一个阻点的事件。由于假设了阻点沿路径的分布为一泊松分布,这一概率可以很方便地得到^[40]为

$$\langle y|x \rangle \Delta y = \exp\left\{-\int_x^y \lambda(z)U(z)dz\right\} \lambda(y)U(y)\Delta y \quad (5.193)$$

因此

$$\langle y|x \rangle = \exp\left\{-\int_x^y \lambda(z)U(z)dz\right\} \lambda(y)U(y) \quad (5.193)'$$

根据(5.193)'式,可以证明,

$$\langle y|x \rangle = \lambda(x)U(x) \frac{\langle y|x_0 \rangle}{\langle x|x_0 \rangle} \quad (5.194)$$

将(5.194)式代入(5.192)式中,并除以 $\langle y|x_0 \rangle$,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{f(y, \sigma)}{\langle y|x_0 \rangle} \right] &= \int_{x_0}^y \lambda(z)U(z) \frac{f(z, \sigma)}{\langle z|x_0 \rangle} dz \\ &\quad - \Lambda(y, \sigma) \frac{f(y, \sigma)}{\langle y|x_0 \rangle} \end{aligned} \quad (5.195)$$

方程(5.195)式两边对 y 求导,可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(y, \sigma)}{\partial \sigma \partial y} - \frac{1}{\langle y|x_0 \rangle} \cdot \frac{\partial \langle y|x_0 \rangle}{\partial y} \cdot \frac{\partial f(y, \sigma)}{\partial \sigma} \\ + \Lambda(y, \sigma) \langle y|x_0 \rangle \frac{\partial f(y, \sigma)}{\partial y} - [\lambda(y)U(y) \\ + \langle y|x_0 \rangle \frac{\partial \Lambda(y, \sigma)}{\partial y}] f(y, \sigma) = 0 \end{aligned} \quad (5.196)$$

方程(5.196)式可以写成标准的双曲型式为

$$\frac{\partial^2 f(y, \sigma)}{\partial \sigma \partial y} + A(y, \sigma) \frac{\partial f(y, \sigma)}{\partial \sigma} + B(y, \sigma) \frac{\partial f(y, \sigma)}{\partial y} + C(y, \sigma) f(y, \sigma) = 0 \quad (5.196)'$$

其初始条件为

$$\begin{cases} f(y, 0) = \delta(x - x_0) \\ f(y, \sigma) = 0 \quad \text{如果 } y < x_0, \sigma \geq 0 \end{cases} \quad (5.197)$$

为了利用(5.196)式求得在载荷 σ 作用下裂纹长度的概率密度函数, 必须首先确定 $\Lambda(y, \sigma)$ 函数。在 σ 作用下, 裂纹在 $(y, y + \Delta y)$ 区间内被止裂的概率为 $1 - e^{-\lambda(y)U(y)\Delta y} \approx \lambda(y)U(y)\Delta y$, 而当外载由 σ 增至 $\sigma + \Delta\sigma$ 时, 裂纹启动开裂的概率为 $e^{-\lambda(y)U(y, \sigma + \Delta\sigma)\Delta y} - e^{-\lambda(y)U(y, \sigma)\Delta y} \approx -\lambda(y)\Delta y \frac{\partial U}{\partial \sigma} \Delta\sigma$ 。这样, $\Lambda(y, \sigma)\Delta\sigma$ 的物理意义为, 在外载 σ 的作用下, 裂纹尖端被止裂在 $(y, y + \Delta y)$ 区间中的条件下, 当载荷增加 $\Delta\sigma$ 时裂纹启裂的概率, 因此,

$$\Lambda(y, \sigma)\Delta\sigma = -\lambda(y)\Delta y \frac{\partial U}{\partial \sigma} \Delta\sigma / \lambda(y)U(y)\Delta y = -\frac{U'_\sigma(y, \sigma)}{U(y, \sigma)} \Delta\sigma \quad (5.198)$$

从上面的讨论可以发现, 只需要根据裂纹尖端材料的微观结构确定止裂夹杂的几何分布 $\lambda(x)$, 以及各止裂点的强度分布 $U(y, \sigma)$, 即可以求得非均匀材料中裂纹的失稳载荷。

从 $\langle y|x \rangle$ 的定义(5.193)式可以看出 $\langle y|x \rangle$ 的物理意义为, 裂纹尖端在 x 点一旦启裂后扩展至 y 处被止裂的概率密度函数, 因此, 裂纹尖端在 x 处的裂纹一旦启裂后, 在载荷不变的条件下, 被止裂的概率 P_s 为

$$\begin{aligned} P_s &= \int_x^\infty \langle y|x \rangle dy \\ &= 1 - \exp\left\{-\int_x^\infty U(z)\lambda(z)dz\right\} \end{aligned} \quad (5.199)$$

显然, 当裂尖在 x 处的裂纹一旦启裂后, 将导致材料整体破坏的概率为

$$P_f = 1 - P_s = \exp\left\{-\int_x^\infty \lambda(z)U(z)dz\right\} \quad (5.200)$$

当 $P_s=1$ 时,表明裂纹肯定将被止住,这种裂纹及载荷构形被称为是稳定的,而当 $P_s<1$ 时,裂纹一旦起裂后,将存在一定的概率导致材料整体的破坏,这种裂纹及载荷构形被称为是非稳态的。

对于给定的裂纹几何构形,当裂纹长度为 x 时,其裂纹开裂的平均应力为

$$\langle \sigma \rangle = \int_0^{\sigma_{\max}} \sigma dP_f = \sigma_{\max} - \int_0^{\sigma_{\max}} P_f d\sigma \quad (5.201)$$

式中, $\sigma_{\max}$ 为含裂纹材料所能承担的最大应力。

如果我们仍然采用应变能释放率准则作为裂纹的开裂准则,并假设其断裂阻力能服从于 Weibull 分布,则裂纹在 z 点被止裂的概率可以表示成

$$U(z) = \exp \left\{ - \left[\frac{G(z) - \gamma_{\min}}{\gamma^* - \gamma_{\min}} \right]^\alpha \right\} \quad (5.202)$$

式中, $G(z)$ 为裂纹尖端在 z 点时应变能释放率, γ^* 及 $\gamma_{\min}$ 为材料常数,相当于裂纹的表面能。

考虑一种特殊情况,在无限大随机介质中,中心含有一长度为 $2x$ 的裂纹,假设 $\gamma_{\min}=0$,该构形下,裂纹的应变能释放率为

$$G(z) = \pi \sigma^2 z / E \quad (5.203)$$

因此

$$\begin{aligned} \int_y^\infty U(z) dz &= \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha (\pi \sigma^2 y / E \gamma^*)^{1/\alpha} F_1 \\ &\cdot \left[\frac{1}{\alpha}; 1 + \frac{1}{\alpha}; (\pi \sigma^2 y / E \gamma^*)^{1/2} \right] \end{aligned} \quad (5.204)$$

式中, $F_1(\alpha; \gamma; z)$ 为库默尔函数。由于上述积分总是收敛的,也即是说,在这种条件下,裂纹一旦开裂,总存在一定的概率使裂纹扩展至无限。因此,这种裂纹及载荷的构形是不稳定的。

考虑如图 5.57 所示的裂纹构形,这种情况下,应变能释放率为一常量,不随裂纹的扩展而增加。设 $U(x)=U_0$, $\Lambda(x)=\Lambda_0$, $r_0=\frac{1}{\Lambda U_0}$, 则方程(5.196)'式成为

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \sigma} + \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{1}{\Lambda_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5.205)$$

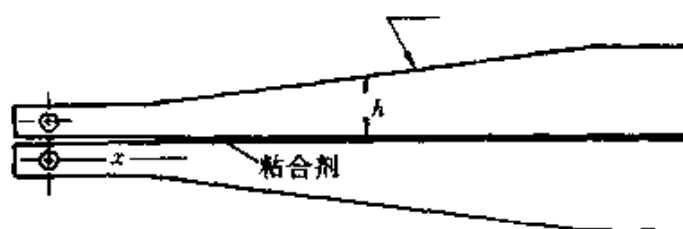


图 5.57 具有常量应变能释放率的裂纹构形

利用拉普拉斯变换,可以得到(5.205)式的解为

$$p(x, \sigma) = \left[\delta(x - x_0) + \frac{1}{r_0} H(x - x_0) \sqrt{\frac{r_0}{\Lambda_0} \cdot \frac{\sigma}{x - x_0}} I_1 \right. \\ \left. \cdot \left(2 \sqrt{\frac{x - x_0}{r_0} \cdot \sigma} e^{-\frac{x - x_0}{r_0}} \right) \right] \cdot e^{-\Lambda_0 \sigma} \quad (5.206)$$

式中, $H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数, $I_1(\cdot)$ 为贝塞尔函数。图 5.58 绘出了不同载荷 $\Lambda_0 \sigma$ 下概率密度函数曲线。

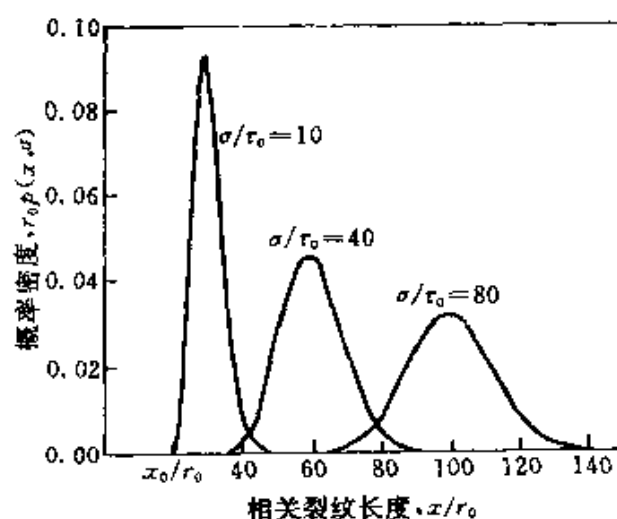


图 5.58 不同载荷条件下, 裂纹长度概率密度曲线^[39]

下面我们仍然以单向纤维增强复合材料为例, 利用上述模型预报裂纹的开裂应力。这里考虑的破坏机理与上面不同, 裂纹为了扩展必须切断所遇见的纤维, 当纤维与基体界面较弱时, 裂纹尖端纤维承担的应力将比很强界面复合材料要小, 这将导致复合材料

断裂强度的增加。

考虑如图 5.59 所示的单向复合材料中的一中心裂纹,其纤维的强度为一随机变量,服从于 Weibull 分布。为了应用上述模型计算复合材料的断裂强度,必须首先求得裂纹尖端纤维所承担的载荷,如下,我们将在 Zweiben^[38]模型的基础上建立一剪滞模型对这一问题进行求解。

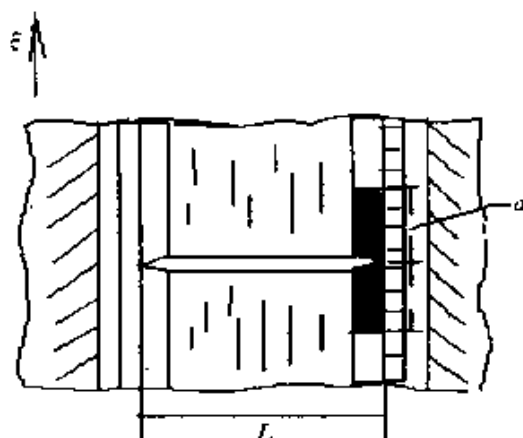


图 5.59 单向纤维复合材料裂纹扩展模型

材料模型如图 5.59 所示,在中心部分有 n 根断裂的纤维,这一部分的轴向位移为 U_0 ,这一部分的两边各有宽度为 d 的基体,外侧为未断裂的纤维,纤维外侧为具有复合材料性能的等效介质。利用剪滞法假设,认为基体仅能承担剪切载荷,并仅考虑沿轴向一维平衡问题,可以建立如下方程,

$$n \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} - 2\bar{\tau}_m = 0 \quad 0 \leq \xi \leq a \quad (5.207)$$

$$\frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - u_1 + \frac{E_f}{E_c} \xi - \bar{\tau}_m = 0$$

$$n \frac{d^2 u_0}{d\xi^2} + 2(u_1 - u_0) = 0 \quad \xi \geq a \quad (5.208)$$

$$\frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - 2u_1 + u_0 + \frac{E_f}{E_c} \xi = 0$$

式中

$$u_i = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{A_f d}{E_f G_m h} \right]^{-1/2} U_i, \bar{\tau}_m = \frac{\tau_m}{\sigma} \left[\frac{G_m A_f}{E_f d h} \right]^{-1/2} \quad (5.209)$$

$$\xi = \left[\frac{E_f A_f d}{G_m h} \right]^{-1/2} x, \alpha = \left[\frac{E_f A_f d}{G_m h} \right]^{-1/2} a$$

式中, U_i 为纤维的轴向位移, A_f 是纤维的横截面积, E_f 是纤维拉伸模量, G_m 为基体的剪切模量, τ_m 为基体与纤维界面产生滑移的临界剪切载荷, a 为非弹性区, 或滑移长度的一半, h 为材料厚度。

方程(5.207)式及(5.208)式的解为

$$u_0 = \frac{\bar{\tau}_m}{n} \xi^2 + c_1 \quad (0 \leq \xi \leq \alpha)$$

$$u_1 = \frac{E_f}{E_c} \xi - \bar{\tau}_m + c_2 e^{\xi} + (\tau_m - c_2) e^{-\xi} \quad (5.210)$$

$$u_0 = \frac{E_f}{E_c} \xi + B_1 e^{-K_1 \xi} + B_2 e^{-K_2 \xi} \quad \xi \geq \alpha$$

$$u_1 = \frac{E_f}{E_c} \xi + B_1 \left(1 - \frac{n}{2} K_1^2\right) e^{-K_1 \xi} + B_2 \left(1 - \frac{n}{2} K_2^2\right) e^{-K_2 \xi} \quad (5.211)$$

式中, $K_1 = [n+1+(n^2+1)^{1/2}]^{1/2} n^{-1/2}$, $K_2 = [n+1-(n^2+1)^{1/2}]^{1/2} n^{-1/2}$, 在滑移端点 $\xi = \alpha$ 处, 位移及应力均应连续, 应满足如下条件:

$$u_0(\alpha) = u_1(\alpha), \quad u'_0(\alpha) = u'_1(\alpha), \quad \frac{du_0}{d\xi}(\alpha) = \frac{du'_0}{d\xi}(\alpha)$$

$$\frac{du_1}{d\xi}(\alpha) = \frac{du'_1}{d\xi}(\alpha) \quad (5.212)$$

$$u_1(\alpha) - u_0(\alpha) = -\bar{\tau}_m$$

利用(5.212)式中的五个条件, 可以确定解(5.210)及(5.211)式中的五个常数 α, c_1, c_2, B_1 及 B_2 。裂纹尖端的第1根纤维所承受的应力集中为

$$K_z = \frac{du_1}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \quad (5.213)$$

由于假设纤维的强度服从于 Weibull 分布, 则裂纹的失稳破

坏概率为,

$$P_f = \exp \left\{ - \int_{x_0}^{\infty} m \exp \left[- \left(\frac{K_x \sigma - \sigma_0}{\sigma^*} \right)^a \right] dx \right\} \quad (5.214)$$

式中, K_x 为应力集中因子, 是裂纹长度 x 的函数, x_0 为裂纹的初始长度。含裂纹的复合材料断裂应力的均值由(5.201)式决定。

参 考 文 献

- [1] A. Parvizi, K. W. Garrett and J. E. Bailey, Constrained Cracking in glass fiber-reinforced epoxy cross-ply laminates, *J. Mat. Sci.*, 1978, 13, 195.
- [2] A. Parvizi and J. E. Bailey, On multiple transverse cracking in glass fiber epoxy cross-ply laminate, *J. Mat. Sci.*, 1978, 13, 2131.
- [3] J. E. Bailey, P. T. Curtis and A. Parvizi, On the transverse cracking and longitudinal splitting behavior of glass and carbon fiber reinforced epoxy cross-ply laminates and the effect of Poisson and thermally generated strain, *Proc. R. Soc. London*, 1979, A366, 599.
- [4] M. G. Bader, J. E. Bailey, P. T. Curtis and A. Parvizi, The mechanism of initiation and development of damage in multi-axial fiber reinforced plastics on laminates, *Proceedings of ICCM3*, Cambridge, 1979, 3.
- [5] P. W. Manders and T. W. Chou, Enhancement of strength in composite reinforced with previously-stress fibers, *J. Comp. Mater.*, 1983, 17.
- [6] A. S. D. Wang and F. W. Crossman, Initiation and growth of transversely cracks and edge delamination, I. An energy method, *J. Comp. Mater.*, Supplemental Volume, 1980, 71.
- [7] F. W. Crossman, W. J. Warren and A. S. D. Wang, Initiation and growth of transverse cracks and edge delamination, I. Experimental correlation, *J. Comp. Mater.*, Supplemental volume, 1980, 88.
- [8] F. W. Crossman and A. S. D. Wang, ASTM Symposium on Damages in Composite Materials: Basic Mechanism, Accumulation, Tolerance, and Characterization, edited by K. L. Reifsnider, ASTM STP 775, 1982.
- [9] A. S. D. Wang, Fracture mechanics of sublaminates cracks in composite materials, *Composite Technology Review*, 1984, 6, 45.
- [10] A. S. D. Wang, Strength, failure, and fatigue analysis of laminates, *Engineering Materials Handbook*, Vol. 1, p. 236. ASM International, Metals park, Ohio 44073.
- [11] N. Laws and G. J. Dvorak, Transverse matrix cracking in composite laminates, in *Composite Material Response: Constitutive relations and damage mechanisms*, edited by G. C. Sih et al., Elsevier Applied Science, 1987.

- [12] N. Laws and G. J. Dvorak, Progressive transverse cracking in composite laminates, *J. Comp. Mater.*, 1988, **22**: 900.
- [13] G. J. Dvorak, N. Laws and M. Hejazi, Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates, I. Thermoelastic properties of a ply with cracks, *J. Comp. Mat.*, 1985, **19**: 216.
- [14] G. J. Dvorak and N. Laws, Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates, I. First ply failure, *J. Comp. Mat.*, 1987, **21**: 309.
- [15] T. W. Chou, Microstructural design of fiber composites, Cambridge University press, 1992.
- [16] N. J. Pagano and R. B. Pipes, The influence of stacking sequence on laminate strength, *J. Comp. Mat.*, 1971, **5**: 50.
- [17] R. B. Pipes and N. J. Pagano, Interlaminar stress in composite laminates under uniform axial extension, *J. Comp. Mat.*, 1970, **4**: 255.
- [18] R. B. Pipes and I. M. Daniel, Moire analysis of the interlaminar shear edge effect in laminated composites, *J. Comp. Mat.*, 1971, **5**: 255.
- [19] R. M. 琼斯著, 朱颐龄等译校, 复合材料力学, 上海科学技术出版社, 1981.
- [20] R. L. Foye and D. J. Baker, Design of orthotropic laminates, AIAA/ASME 11th Conf. Structures, Structural Dynamics, and Materials, Denver, Colorado, 1970.
- [21] J. G. Williams, On the calculation of energy release rates for crack laminates, *Int. J. Fracture*, 1988, **36**: 101.
- [22] J. G. Williams, End corrections for orthotropic DCB specimens, *Composites Science and Technology*, 1989, **35**: 367.
- [23] Y. Wang and J. G. Williams, Corrections for mode I fracture toughness specimens of composite materials, *Composites Science and Technology*, 1992, **43**: 251.
- [24] J. R. Reeder and J. H. Crews, Jr., Mixed-mode bending method for delamination testing, *AIAA Journal*, 1990, **28**(7): 1270.
- [25] J. R. Reeder and J. H. Crews, Jr., Redesign of the mixed-mode bending test for delamination toughness, *Proc. of ICCM-8*, Section 36-13, 1991.
- [26] J. Aveston and A. Kelly, Tensile first cracking strain and strength of hybrid composites and laminates, *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1980, **A294**: 519.
- [27] J. Aveston, G. Cooper and A. Kelly, Single and multiple fracture, in *The Properties of Fiber Composites*, Conference Proceedings, 1971: 15-26.
- [28] J. Aveston, G. Cooper and A. Kelly, Theory of multiple fracture of fibrous composites, *J. Mat. Sci.*, 1973, **8**: 352.
- [29] A. Kelly, *Strong Solids*, Clarendon press, Oxford, 1973.
- [30] A. Kelly, Composites with brittle matrices, in *Frontier in Materials Science*, 1976.

- [31] B. Budiansky, J. W. Hutchinson and A. G. Evans, Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, 1986, **34**; 167.
- [32] A. G. Evans and D. B. Marshall, Mechanical behavior of ceramic matrix composites, in *Fiber Reinforced Ceramic Composites*, edited by K. S. Mazdiyshi, Noyes Publications, 1990.
- [33] D. B. Marshall and B. N. Cox, Tensile fracture of brittle matrix composites; influence of fiber strength, *Acta Metall.*, 1987, **35**; 2607.
- [34] B. N. Cox, D. B. Marshall and M. D. Thouless, Influence of statistical fiber strength distribution on matrix cracking in fiber composites, *Acta Metall.*, 1989, **37**; 1933.
- [35] S. Danchaivijit and D. K. Shetty, Matrix cracking in ceramic-matrix composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1993, **76**; 2497.
- [36] W. A. Curtin, The "tough" to brittle transition in brittle matrix composites, *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, **41**; 217.
- [37] Y. C. Gao, Y. M. Mai and B. Cotterell, Fracture of fiber-reinforced materials, *Journal of Applied Mathematics and Physics(ZAMP)*, 1988, **39**.
- [38] C. Zweben, An approximate method of analysis for notched unidirectional composites, *Engineering Fracture Mechanics*, 1979, **6**(1).
- [39] B. I. Kunin, A stochastic model for slow crack growth in brittle materials, *ASME Appl. Mech. Rev.*, 1994, **47**(1); Part 2.
- [40] B. Wang(王彪), J. Dai(戴进) and S. Y. Du(杜善义), A stochastic model for crack growth in Composite materials, *Proceedings of ICCM-11*, Gold Coast, 1997.
- [41] 王彪,刘玉岚,刘金喜,杜善义,复合材料细观力学的一些新进展,第九届全国复合材料学术会议论文集,上册,p. 435,世界图书出版公司,1996,北京.
- [42] 王铎主编,断裂力学,上册,哈尔滨工业大学出版社.

第六章 脆性材料增韧增强模型

近十几年来,陶瓷基复合材料增韧的研究发展较快,成为材料科学和固体力学交叉领域内最为活跃的研究热点之一。宏观与细观分析相结合、力学与材料科学的相互渗透以及材料科学家与力学家的通力合作成为该领域研究的一大特点。陶瓷等脆性材料所具有的耐高温、耐腐蚀、价廉等许多优异的性能一直吸引着材料科学家的关注。但由于它们对缺陷极其敏感的性质及较低的断裂韧性(一般 $K_{IC} = 1 \sim 3 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$)限制了它们的广泛应用。自从1975年澳大利亚科学家 Garvie^[1]等揭示了氧化锆陶瓷的韧性可以达到 $20 \text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ 如此高的水平以来,开辟了关于陶瓷增韧研究的新领域。随后在德国、美国等国的材料学家均有关于高韧性陶瓷的最新研究成果。著名力学家及材料学家 McMeeking, Budiansky, Hutchinson, Evans 及 Marshall 等人建立了细观力学模型^[2-6],定量解释了相变对陶瓷的增韧效果。这一研究的成功吸引了许多杰出的力学家同材料学家合作共同解释陶瓷的增韧机理并开发可预先设计的更高性能的陶瓷及陶瓷基复合材料。

真正关于陶瓷基复合材料的研究开始于1983年。Prewo 及 Brennan 首次宣布了 nicalon sic 纤维增强玻璃陶瓷复合材料的研制成功,这一报导使得研制高温下具有较高韧性的陶瓷基复合材料成为可能。另外一项重要的发现应该认为是 Al_2O_3 陶瓷可以由碳化硅晶须增韧,这使得脆性增强相来增韧脆性基体从而得到高韧性的复合材料成为可能。在本章中,我们将详尽介绍脆性材料的增韧机理及细观力学模型,对前而所讨论过的单向纤维增强复合材料模型在结构陶瓷中的应用予以简单介绍。

§ 6.1 相变增韧模型

在 ZrO_2 四方相多晶体(TZP)或以四方相 ZrO_2 为第二相的陶瓷基复合材料中(PSZ, ZTA), 在高应力及合适的温度场作用下, 可以诱发 ZrO_2 晶粒发生由四方到单斜相的马氏体相变, 伴随着相变, 晶格将产生 4% 左右体膨胀变形及 16% 左右的剪切变形。由于基体的限制, 这种相变应变将导致产生一残余应力场, 正是这一残余应力场抵消了部分外加载荷, 从而使得裂纹尖端应力强度因子降低, 材料的断裂韧性提高。

考虑如图 6.1 所示的含有可相变的四方相 ZrO_2 粒子, 在环境温度 T 及外加体应力 σ_{ii}^0 及剪切应力 σ_{13}^0 作用下, 设有 C_f 体积分量的四方相二氧化锆粒子已经发生了马氏体相变, 王彪^[8] 建立了一统计细观力学模型, 建立了已相变粒子体积分量同外载之间的关系, 即

$$\Sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}^0\epsilon_{kk}^p + 2\sigma_{13}^0\epsilon_{13}^p = g + hC_f - k[\ln(1 - \frac{C_f}{C_f^0})^{-1}]^{1/2} \quad (6.1)$$

式中

$$\begin{aligned} g &= \frac{2\mu(1+\gamma)}{9(1-\gamma)}(\epsilon_{kk}^p)^2 - \frac{\mu(5\gamma-7)}{15(1-\gamma)}(\epsilon_{13}^p)^2 + \Delta S^{\text{tr-m}}(T_0 - T) \\ h &= -\frac{4\mu(1+\gamma)}{9(1-\gamma)}(\epsilon_{kk}^p)^2 + \frac{2\mu(5\gamma-7)}{15(1-\gamma)}(\epsilon_{13}^p)^2 \\ k &= -\frac{1}{v}(\frac{1}{CD^3})^{1/2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

式中, ϵ_{kk}^p 及 ϵ_{13}^p 分别为伴随相变的体膨胀应变及剪切应变, $\Delta S^{\text{tr-m}}$ 为伴随相变的熵的变化, T_0 为马氏体相变起始温度, μ 及 γ 为材料的剪切模量及泊松比, v 为相变粒子体积, D 为相变粒子直径, C_f^0 为初始可相变的 ZrO_2 粒子体积分量, 式(6.2)中的 C 为材料常数。

孙庆平、余寿文及黄克智^[9]从细观力学、热力学及相变的微观

机制出发,应用 Eshelby 关于相变夹杂的解及 Mori-Tanaka 方法,导出了含有 ZrO_2 相变粒子陶瓷的本构方程,并成功地解释了相变晶粒的择优取向,宏观塑性的应力倾向性及相变时应力-应变关系的软化行为等。

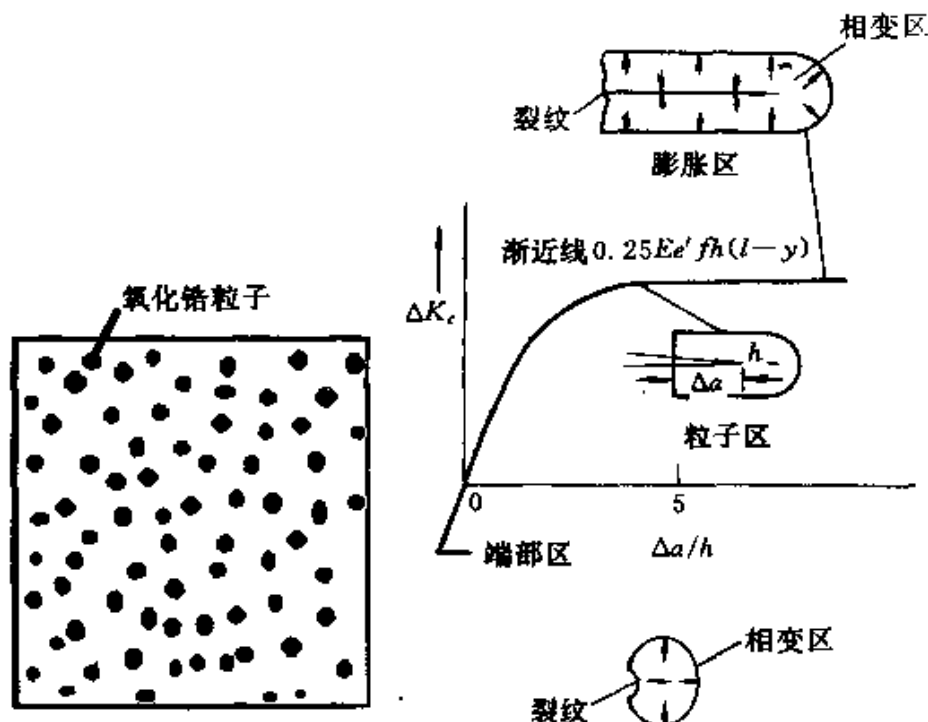


图 6.1 氧化锆陶瓷中的相变粒子 图 6.2 围绕裂纹相变区示意图

考虑如图 6.2 所示的半无限长裂纹,由于裂纹尖端的高应力集中将诱发该区域的 ZrO_2 晶粒发生相变,当裂纹扩展时,将在裂纹尾区上、下表面形成一相变区,从前面介绍可以知道,相变区中有一残余应力场,这一残余应力场的存在将使裂纹尖端应力强度因子下降,从而产生增韧的效果。McMeeking 及 Evans^[2]认为围绕裂纹含有相变 ZrO_2 粒子的相变区为一均匀连续介质,且具有相变应变 $E_{ij}^T = \epsilon_{ij}^T C_f$,其中, C_f 为相变粒子体积含量。考虑平面应变条件下相变区中的两对称微元 dA (图 6.2),该相变微元的残余应力场导致的裂纹尖端应力强度因子的改变为

$$dK_{\text{tip}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \cdot \frac{E dA}{1 - \gamma^2 r^{-3/2}} M(E_{ij}^T, \beta) \quad (6.3)$$

式中

$$M(E_{ij}^T, \beta) = (E_{11}^T + E_{22}^T) \cos \frac{3\beta}{2} + 3E_{12}^T \cos \frac{5}{2}\beta \sin \beta \\ + \frac{3}{2}(E_{22}^T - E_{11}^T) \sin \beta \sin \frac{5}{2}\beta \quad (6.3)'$$

在整个相变区内对式(6.3)进行积分, McMeeking 及 Evans 在不考虑相变剪切应变的条件下, 得到稳态情况下应力强度因子的改变为

$$\Delta K = \iint_{\Omega} dK_{\text{tip}} \approx -0.214 \frac{E}{1-\gamma} C_f \theta^T \sqrt{H} \quad (6.4)$$

式中, θ^T 为相变体膨胀应变, H 为相变尾区高度。

(6.4) 式的预测结果与实验值相比偏低。因为在导出(6.4)式时认为, 当 ZrO_2 粒子所承受的静水应力达到某一临界值时, 粒子将发生相变, 这样, 依据静水压力准则可以首先确定相变区域的几何形状。当采用如下与实验结果比较相符的双线性相变准则

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_e^*} + \frac{\sigma_m}{\sigma_m^*} = 1 \quad (6.5)$$

式中, $\sigma_e = (\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij})^{1/2}$, $\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$, S_{ij} 为偏应力分量, σ_e^* 及 σ_m^* 为材料常数, 由实测值可以得到 $\sigma_m^*/\sigma_e^* = 0.833$ 。根据准则(6.5)式确定其相变区域, 再进行积分可以得到应力强度因子的降低为

$$\Delta K \approx -0.48 \frac{E}{1-\gamma} C_f \epsilon_{ii}^T \sqrt{H} \quad (6.6)$$

图 6.3 绘出了(6.4)式及(6.6)式预报结果及关于 PSZ 的实验测试结果。

很显然, 在 McMeeking 及 Evans^[2]以及 Budiansky^[3]等工作中, 将相变区当成均匀具有一定相变应变的材料, 这只有当相变粒子尺度很小且分布均匀的条件近似适用。王彪等^[10]将相变粒子认为是球形的内应力夹杂, 并且随机地分布在裂纹周围, 利用权函数方法求得了相变粒子的存在而导致的应力强度因子的降低。

考虑如图 6.4 所示的半无限长裂纹, 根据权函数理论^[11], 在某一相变夹杂 v_p 的作用下, 应力强度因子的降低为

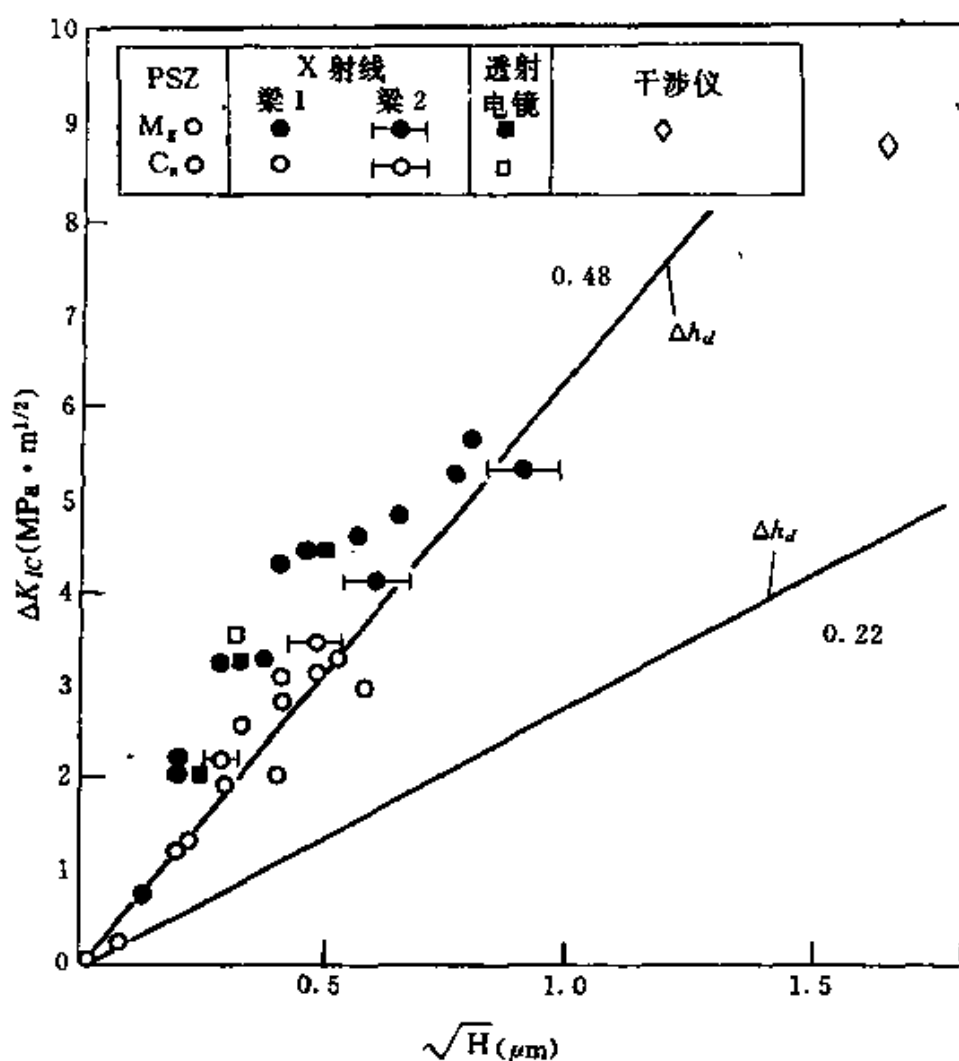


图 6.3 相变增韧理论预报值同实验值比较^[4]

$$\Delta K(z') = \int_{v_p} h_{ij}(x, y, z - z') C_{ijM} \epsilon_M^T dx dy dz \quad (6.7)$$

式中, $h_{ij}(x, y, z - z')$ 为三维权函数。如果仅仅考虑体膨胀相变应变, 即

$$\epsilon_M^T = \frac{1}{3} \theta^T \delta_M \quad (6.8)$$

则 I 型应力强度因子改变为

$$\Delta K_I(z') = \frac{4\mu(1-\gamma)}{3} \int_{v_p} P_{,j}(x, y, z - z') \theta^T dx dy dz \quad (6.9)$$

式中

$$P_{,y} = \frac{\cos(\Phi/2)[1 - 8(\frac{\rho^2}{R^2})\sin^2(\Phi/2)]}{2(1 - \gamma)(2\pi)^{3/2}R^2\rho^{1/2}} \quad (6.10)$$

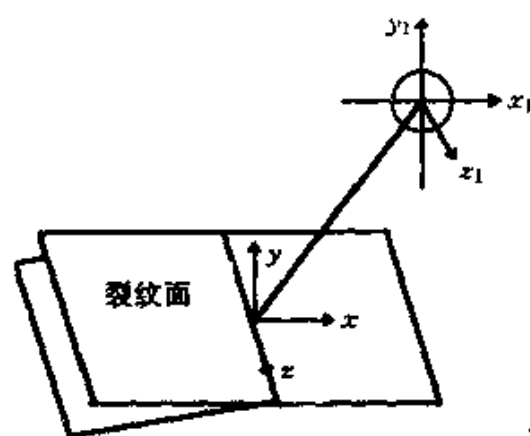


图 6.4 围绕裂纹尖端的相变粒子

且 $R^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2$, ρ, Φ 分别为原点在裂纹尖端及 (x, y) 平面内的极坐标。

由于 N 个相变粒子的存在而导致应力强度因子的变化可由叠加原理求得为

$$\begin{aligned} \Delta K_I &= \sum_{i=1}^N \Delta k_i \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{4\mu(1 + \gamma)}{3} \int_{v_p} P_{,y}(x, y, z - z') \theta^i dx dy dz \end{aligned} \quad (6.11)$$

由于相变粒子的位置是随机分布的, 严格地说, ΔK_I 应为一随机变量, 当 N 数目很大时, 可以忽略其随机分散性。 ΔK_I 的均值 $\langle \Delta K_I \rangle$ 可表示成

$$\begin{aligned} \langle \Delta K_I \rangle &= \frac{4\mu(1 + \gamma)}{3} \langle N \rangle \\ &\quad \cdot \left\langle \int_{v_p} P_{,y}(x, y, z - z') \theta^i dx dy dz \right\rangle \end{aligned} \quad (6.12)$$

任一相变粒子位置的概率密度函数可以认为近似等于其频率

分布,即^[12]

$$f(\vec{r}) = \frac{\lambda(\vec{r})}{\langle N \rangle} \quad (6.13)$$

式中, $\lambda(\vec{r})$ 为相变粒子的数目密度函数,即单位体积中平均相变粒子的数目,它可能是位置的函数,这也可以反映相变粒子分布不均匀情况。利用(6.13)式,可以将(6.12)式表示成

$$\langle \Delta K_I \rangle = \frac{4\mu(1+\gamma)}{3} \int_v \lambda(\vec{r}) d\vec{r} \int_{v(\vec{r})} P_{,y}(x, y, z - z') \theta^T dx dy dz \quad (6.14)$$

如果假设相变粒子在空间均匀分布,且其形状为球形,半径为 a ,对(6.14)式中关于 $v(\vec{r})$ 的积分可以近似处理,方程(6.14)式成为

$$\begin{aligned} \langle \Delta K_I \rangle = & \frac{\mu(1+\gamma)}{3\sqrt{2\pi}(1-\gamma)} C_f \theta^T \int_0^S \left[\frac{3}{5} \rho_0^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_0\right) \right. \\ & + \frac{1}{10} \left[\rho_1^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_1\right) + \rho_2^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_2\right) \right. \\ & \left. \left. + \rho_3^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_3\right) + \rho_4^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_4\right) \right] \rho_0 d\rho_0 d\varphi_0 \right] \end{aligned} \quad (6.15)$$

式中, $\rho_i (i=1,2,3,4)$ 及 $\varphi_i (i=1,2,3,4)$ 分别为 x - y 平面内圆球横截面边缘同局部坐标交点的极坐标(图 6.4),它们可以表示成圆球中心坐标 ρ_0, φ_0 及 a 的函数。 S 是相变区的横截面积。

为了同 McMeeking 及 Evans^[2] 的结果比较,相变粒子认为是无限长的圆柱体,则方程(6.14)式成为

$$\begin{aligned} \langle \Delta K_I \rangle = & \frac{\mu(1+\gamma)}{3\sqrt{2\pi}(1-\gamma)} \theta^T \int_S \lambda(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \\ & \cdot \int_{A(r_0)} \rho^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) dx dy \end{aligned} \quad (6.16)$$

式中, $A(r_0)$ 为圆心在 r_0 处的圆柱体横截面积,如果 $A(r_0)$ 趋于无限小,(6.16)式近似成为

$$\langle \Delta K_I \rangle = \frac{\mu(1+\gamma)}{3(1-\gamma)\sqrt{2\pi}} C_f \theta^T \int_0^S \rho_0^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_0\right) \rho_0 d\rho_0 d\varphi_0 \quad (6.17)$$

(6.17)式与 McMeeking 及 Evans 等得到的结果一致。

当相变粒子的半径为一有限值, (6.16)式可以表示成

$$\begin{aligned} \langle \Delta K_I^p \rangle = & \frac{\mu(1+\gamma)}{3\sqrt{2\pi}(1-\gamma)} C_f \theta^T \int_0^{\pi/3} \left\{ \frac{1}{2} \rho_0^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_0\right) \right. \\ & + \frac{1}{8} [\rho_A^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_A\right) + \rho_B^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_B\right) \\ & \left. + \rho_C^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_C\right) + \rho_D^{-3/2} \cos\left(\frac{3}{2}\varphi_D\right)] \right\} \rho_0 d\varphi_0 d\rho_0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

如果采用静水压力相变准则, (6.15)式及 (6.18)式裂纹前端的积分区域可表示成

$$\rho = \frac{8H}{3\sqrt{3}} \cos^2(\varphi/2) \quad (6.19)$$

其积分区域(或相变区域)可以分成如图 6.5 所示的三部分:

$$\begin{aligned} S_1: 0 \leq \varphi_0 \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \rho_0 \leq \frac{8H}{3\sqrt{3}} \cos^2(\varphi_0/2) \\ S_2: \frac{\pi}{3} \leq \varphi_0 \leq \pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{H}{L}, \quad 0 \leq \rho_0 \leq H/\sin\varphi_0 \\ S_3: \pi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{H}{L} \leq \varphi_0 \leq \pi, \quad 0 \leq \rho_0 \leq -\frac{1}{\cos\varphi_0} \end{aligned} \quad (6.20)$$

当裂纹未扩展时, 初始相变区形状由 (6.19)式决定, 这时可以得到球形相变夹杂及圆柱形相变夹杂导致的应力强度因子的变化分别为

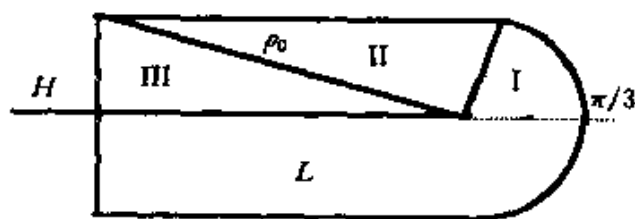


图 6.5 积分区域(相变区域)示意图

$$\begin{aligned} \langle \Delta K_I \rangle = & \frac{EC_f \theta^T \sqrt{a}}{3\sqrt{2\pi}(1-\gamma)} f_1\left(\frac{H}{a}\right) \\ \langle \Delta K_I^p \rangle = & \frac{EC_f \theta^T \sqrt{a}}{3\sqrt{2\pi}(1-\gamma)} f_1^p\left(\frac{H}{a}\right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

式中, $f_1(H/a)$ 随 H/a 变化曲线示于图 6.6 中。值得一提的是, $\langle \Delta K_I \rangle$ 及 $\langle \Delta K_I^p \rangle$ 尽管比较小, 但确是正值, 这表面裂纹前端的相变区不仅没有起到增韧效果, 反而具有一些减韧效果。

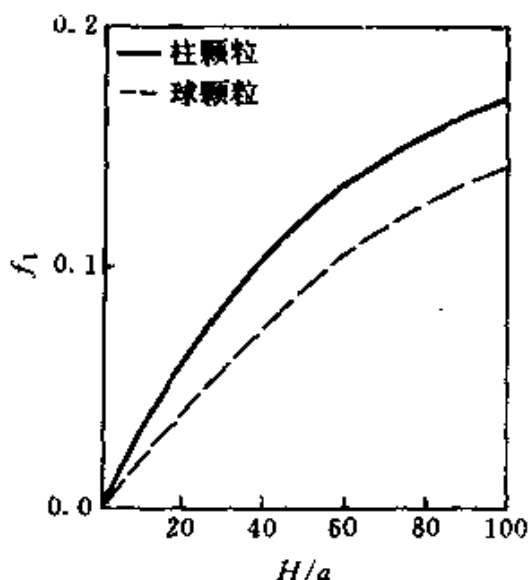


图 6.6 裂纹未扩展时, 尖端相变区的影响

将裂纹扩展后, 相变区尺寸由 (6.20) 式确定, 当 $L \rightarrow \infty$ 时, 圆柱形相变粒子导致的应力强度因子改变的稳态值为

$$\langle \Delta K_I \rangle = - \frac{EC_f \sigma^T \sqrt{a}}{3 \sqrt{2\pi}(1-\gamma)} f_2(H/a) \quad (6.22)$$

图 6.7 中绘出了 $f_2(H/a)$ 随 H/a 变化曲线。

为了考察随裂纹扩展, 即 L 增加, 材料韧性的增加规律, 也即 R 阻力曲线, 图 6.8 中给出了不同 H/a 值时, $\langle \Delta K_I \rangle$ 随裂纹长度 L 变化曲线。

为了计算由于 ZrO_2 粒子的相变而导致陶瓷材料断裂韧性的增加, 不仅可以采用上述的引入残余应力的直接计算方法, 而且也可以首先得到相变区的等效非线性本构关系, 再利用 J 积分通过能量分析的方法求得, 可以证明两种方法应该得到相同的结果。

已知了相变区的存在, 对增韧值 ΔK 的计算问题, 目前已基本得到解决, 如何建立更合理的相变准则使理论预测与实测增韧值相吻合的关键。因此针对这一类型的马氏体相变, 人们应从微

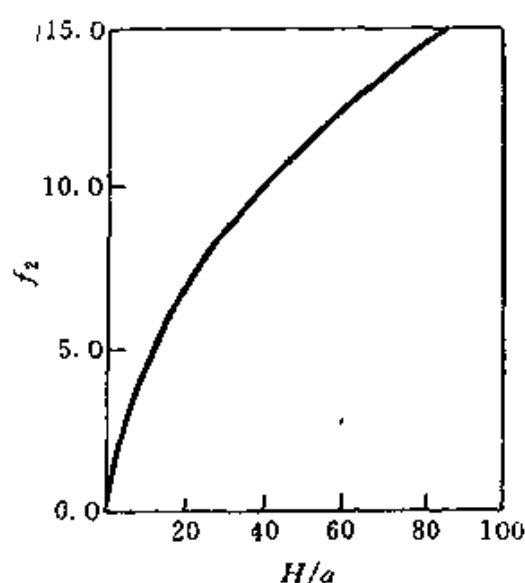


图 6.7 函数 f_2 随相变区尺寸变化曲线

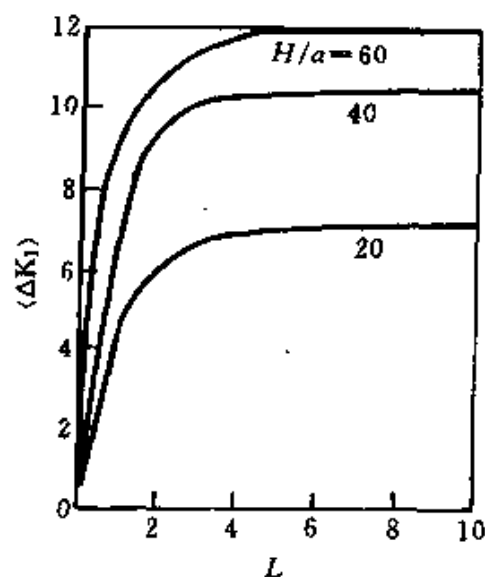


图 6.8 不同相变区尺寸,增韧值
随裂纹扩展长度变化曲线

观、细观机理出发,建立正确的模型对相变过程进行描述,并建立宏观的相变本构关系,使得问题能够得到圆满的解答。

§ 6.2 微裂纹增韧模型

随着对相变增韧研究的深入,微裂纹对裂尖的屏蔽导致增韧这一机理受到了越来越多的研究者的重视。在陶瓷中由于不同相或不同晶粒之间热膨胀系数的不一致,或由于相变导致的残余拉应力场将导致在晶粒内部及晶界等处产生微裂纹,由于微裂纹的出现,将释放材料中的残余应变,这样,在微裂纹区中各点可以认为存在一类似于平均相变应变 $C_f \epsilon_0^T$ 的残余应变 θ_T 。因此,当宏观裂纹扩展后,其尾区的残余应变 θ_T 将降低裂纹尖端的应力集中因子,产生增韧效果。另一方面,由于微裂纹的出现,将使得材料的弹性常数降低,这样,围绕裂纹的软化材料也将使得裂纹尖端应力强度因子降低。这也将产生一定的增韧效果。类似于相变增韧的计算,当微裂纹生核准则由最大正应力控制时,稳态增韧效果为

$$\Delta K_1 \approx 0.40E\theta_T \sqrt{H} \quad (6.23)$$

式中, θ_T 类似于 $C_f \epsilon_{ij}^T$, 是微裂纹导致的体膨胀应变。当微裂纹生核条件由最大静水压力控制, 其增韧效果为

$$\Delta K_1 \approx 0.32E\theta_T \sqrt{H} \quad (6.24)$$

根据 Hutchinson 的研究结果^[7], 由于微裂纹的存在而导致材料软化产生的增韧效果为

$$\Delta K_2/K = 1.42\eta \quad (6.25)$$

式中, $\eta = N \langle a^3 \rangle$, N 为单位体积中裂纹数目, a 为圆币形裂纹半径。通常来说, 体膨胀应变及材料软化共同的增韧效果并不简单的等于 ΔK_1 加 ΔK_2 , 它们之间有一定的相关性。

为了求得由于微裂纹的出现而导致的体膨胀应变, 我们考虑如下两种情况。

(1) 基体中含有的球形夹杂受残余拉应力作用, 这时, 微裂纹即可能出现在夹杂中, 又可以出现在界面处(图 6.9)。当夹杂中出

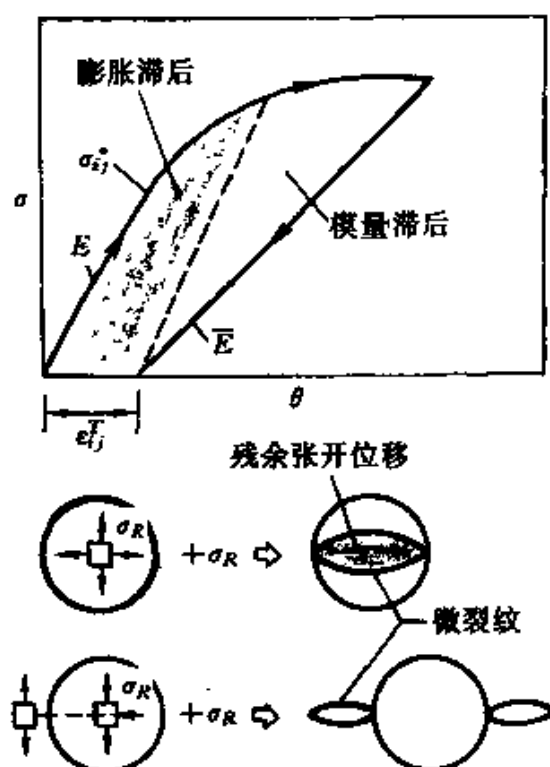


图 6.9 夹杂中承受拉伸残余应力时, 微裂纹构型

现一半径为 a 的圆币状裂纹时,所产生的体积膨胀为

$$\Delta V = 16a^3/3 \cdot (1 - \nu^2)\sigma_{kk}^p/E \quad (6.26)$$

式中, $\sigma_{kk}^p = 2E\varepsilon_{kk}^T/9(1 - \nu)$, ε_{kk}^T 为夹杂与基体之间不协调应变。这样,可以求得单位体积中有 N 个微裂纹出现后的体膨胀应变

$$\theta_T = \frac{16}{3}[(1 - \nu^2)/E]\eta\sigma_{kk}^p \quad (6.27)$$

(2)基体中的夹杂承受残余压应力,这时微裂纹出现在围绕夹

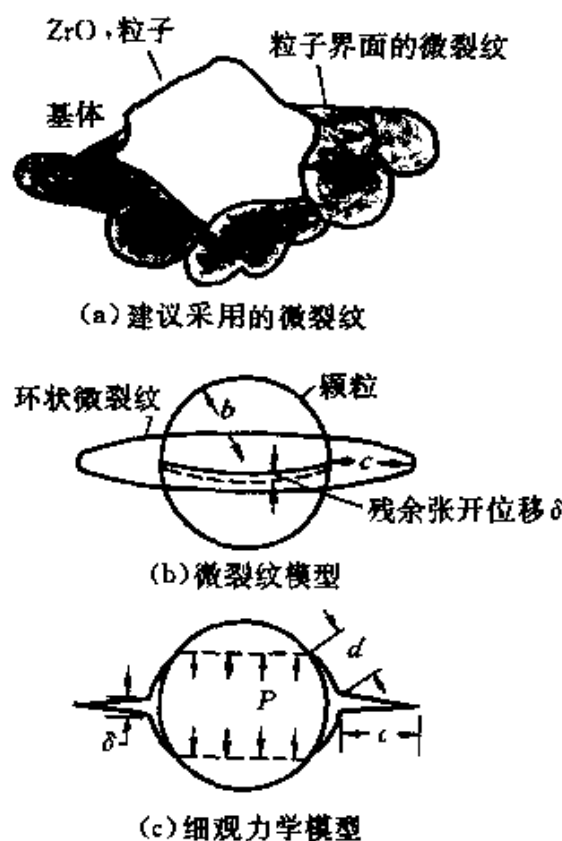


图 6.10 夹杂中承受压缩残余应力时,微裂纹的构型

杂的基体中(图 6.10),可以导出体积膨胀应变为

$$\theta_T = 3.6(u_R/a)\eta/\xi^2 \quad (6.28)$$

式中, u_R 为在界面处微裂纹残余张开位移,且

$$\xi = c/a \quad (6.29)$$

式中, c 为微裂纹长度。

§ 6.3 偏转增韧

残余应力以及高韧性第二相颗粒的阻挡作用使得宏观裂纹在扩展中发生偏转和扭折,从而减小了裂纹尖端的应力强度因子,并增加了材料的断裂韧性。偏转及纤维增韧克服了微裂纹对材料的恶化作用及高温下相变增韧效果不明显的缺点。

参 考 文 献

- [1] R. C. Garvie, R. H. Hannink and R. T. Pascoe, Ceramic steel? *Nature*, 1975, **258**, 703.
- [2] R. M. McMeeking and A. G. Evans, Mechanics of transformation toughening in brittle materials, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1982, **55**: 242.
- [3] B. Budiansky, J. W. Hutchinson and J. M. Lambropoulos, Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics, *Int. J. Solids Structures*, 1983, **19**: 337.
- [4] J. C. Lambropoulos, Shear, shape and orientation effects in transformation toughening, *Int. J. Solids Structures*, 1986, **22**: 1083.
- [5] D. B. Marshall, Strength characteristics of transformation-toughened zirconia, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1986, **69**: 173.
- [6] M. V. Swain and J. R. F. Rose, Strength limitations of transformation-toughened zirconia alloys, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1986, **69**: 511.
- [7] A. G. Evans, Perspective on the development of high-toughness ceramics, *J. Am. Ceram. Soc.*, 1990, **73**: 187.
- [8] B. Wang (王彪), Some special characteristics of stress-induced martensitic transformation predicted by a statistical model, *Acta Mater.*, 1997, **45**: 1551.
- [9] Q. P. Sun, K. C. Hwang and S. W. Yu, A micromechanics constitutive model of transformation plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 1991, **39**: 507.
- [10] B. Wang, S. Y. Du and S. Chen, A new calculation method of transformation toughening in ceramics, *Proc. of ICCM-8*, 23-G-2, 1990.
- [11] H. Gao, Application of 3-D weight function, I. Formulation of crack interaction with transformation strains and dislocations, *J. Mech. Phys. Solids*, 1988, **37**: 133.
- [12] B. Wang, A general theory on media with randomly distributed inclusions, part I: the average field behaviors, *ASME J. Appl. Mech.*, 1990, **57**: 857.

第七章 复合材料的细观压缩失稳

纤维增强复合材料在承受沿纤维方向的强压缩载荷时,可能出现由纤维细观失稳而引发的突然破坏。关于压缩失稳性能的研究,有着广阔的应用前景,如:具有隐身性能的复合材料潜艇壳体的深水失稳防范;受压缩载荷的复合材料结构对冲击损伤的缺陷敏感性;高密度微电子封装复合厚膜的屈曲驱动层裂行为;复合材料运动器材(如撑竿跳杆)在弯压冲击载荷作用下的力学特性和稳定性等。因此,复合材料及结构的失稳问题得到了国内外科技人员的广泛重视。在本章中,我们主要依据清华大学的研究小组魏悦广博士,杨卫教授及黄克智教授关于在强压下复合材料失稳性能的研究成果^[1~4],对于细观失稳准则及后屈曲过程进行较为详尽的阐述。

§ 7.1 单向复合材料细观压缩失稳研究概况

一、细观弹性失稳理论

单向纤维增强复合材料在承压时的细观失稳问题最早由 Dow 和 Gruntfest^[5]提出。随后, Rosen (1965)^[6]和 Schuerch (1966)^[7]先后用研究弹性基础梁时所建立的 Timoshenko 方法导出了两种细观弹性失稳模型的临界压应力 σ_c 公式,即异相位失稳模式解(基体伸缩型)和同相位失稳模式解(基体剪切型),分别适用于纤维稀疏(纤维体积分数 $v_f < 0.1$)和纤维密集($v_f > 0.1$)的情况。两种弹性失稳模型的临界应力分别为

$$\begin{aligned} |\sigma_c| &= 2\sqrt{E_f E_m} \cdot \sqrt{\frac{v_f^3}{3(1-v_f)}} & v_f < 0.1 \\ |\sigma_c| &= \frac{\mu_m}{1-v_f} = \frac{\tau_m}{\theta_{\max}} & v_f > 0.1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

式中, E 为杨氏模量, μ 为剪切模量, 而下标 f 及 m 表示纤维及基体。此外, τ_m 和 $\theta_{\max}$ 分别表示基体剪切强度和纤维失稳的最大转角。(7.1) 式并未能反映材料非线性、界面行为、细观几何参数及初始缺陷的影响。

二、细观失稳问题研究综述

Rosen 在提出细观弹性失稳模式时, 曾根据下述实验现象, 即环氧基体中的玻璃纤维在温度环境改变时, 所造成的错配光弹应力图案呈周期性变化。由此 Rosen 假定纤维在基体中受压时将产生周期性失稳模式。Schuerch(1966) 对硼 / 镁复合材料所测定的压缩强度值符合公式(7.1)的预测值。与此同时, Hayashi(1966)^[8] 在木材 / 聚氨酯叠合材料的压缩实验中观察到 Rosen 的同相位失稳模式。Lager 和 June(1969)^[9] 随后对硼 / 环氧所做的压缩实验, 也基本上肯定了细观弹性失稳理论, 但对 Rosen 公式提出了值为 0.63 的修正系数。Davis(1970)^[10] 对硼 / 环氧圆管试件的实验表明: 在精心控制的实验条件下, 能得到与 Rosen 公式相一致的失稳临界应力。

尽管存在上述支持或基本支持 Rosen 模型的实验数据, 但也有一大批实验结果对细观弹性失稳理论提出疑问乃至否定。例如, De Ferran 和 Harris(1970)^[11] 对钢丝 / 聚酯的压缩实验, Greszezuk(1973)^[12] 所做的高模量碳纤维复合材料的压缩实验, Kulkarni, Rice 和 Rosen(1973)^[13] 对 Kevlar 49 / 环氧所做的压缩实验, Ewins 及 Ham(1974)^[14] 对碳纤维 / 塑料和碳纤维 / 环氧的压缩实验以及 Hancox(1975)^[15] 对碳纤维 / 塑料的压缩实验等所得的压缩强度实测值均远低于 Rosen 的预测值。很显然, Rosen 模型不能正确预报的复合材料失稳应力往往发生在那些同 Rosen 假定不一致的失稳模式。Piggott 和 Harris(1980)^[16] 对碳纤维、玻璃纤维和 Kevlar 49 纤维增强聚酯做了系统的压缩实验, 以考察压缩破坏模式与纤维体积分数之间的关系。他们发现, 当纤维以稀疏分布过渡到较密时 ($0.05 < v_f < 0.3$), 压缩强度上升, 破坏模式由层

间开裂型(细观失稳型)过渡到纤维破坏型;若 v_f 继续增加,则压缩强度下降,破坏模式转为折曲带型。

尽管后来关于复合材料压缩失稳又有许多研究工作,但问题还未能圆满解决,这可能与十几年前人们还主要利用复合材料的拉伸性能,用于承受强压缩载荷的场合不多,这一问题显得不那么迫切有关。最近,魏悦广和杨卫(1992)^[1]用弹塑性分叉理论和周期性界面条件分析了层状复合材料在弹塑性细观压缩失稳过程中贯穿折曲带的形成,并结合材料细观构元的应力-应变关系得到了与实验符合的压缩强度预测。杨卫和魏悦广创造性地借用了裂纹扩展的能量准则,对承压纤维复合材料的表面失稳及斜折带的形成与扩展,首次提出了斜折带扩展的桥联模型。随后,魏悦广、杨卫和黄克智(1994)^[2]又对压缩强度与失稳模式的缺陷敏感性进行了讨论。

§ 7.2 平面弹塑性失稳理论

本节在平面应变的框架下给出弹塑性失稳理论。设物体在失稳前的预应变场为均匀的,并以均匀分布的应力分量 σ_1, σ_2 来表征失稳前的预应力。根据动力稳定性研究方法,可以在失稳前的预应变构形上附加一平衡且协调的扰动场来研究物体的稳定性。若该扰动解所对应的速度场 v_1 和 v_2 为不可压缩,则可建立速度势函数 $\varphi(x_1, x_2)$ 如下,

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, v_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \quad (7.2)$$

式中, x_1 及 x_2 为即时坐标。对材料中任一单元,假设其本构响应率无关且各向同性,则可写出如下本构关系(Hill and Hutchinson, 1975)

$$\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22} = 2\mu^* (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}), \dot{\sigma}_{12} = 2\mu \dot{\epsilon}_{12} \quad (7.3)$$

式中, $\dot{\sigma}_{ij} (i, j = 1, 2)$ 为 Cauchy 应力张量 σ_{ij} 的 Jaumann 率, $\dot{\epsilon}_{ij}$ 为欧拉应变率张量。 μ 为 $0^\circ \sim 90^\circ$ 方向的剪切模量。在轴压预应变下

突然产生分叉扰动时,若屈服面光滑, μ 基本呈弹性响应。 μ^* 为 45° 方向的剪切模量,可算得

$$\mu^* = (\mu^{-1} + 2H^{-1})^{-1} \quad (7.4)$$

式中, H 为单轴加载下的塑性硬化模量。

通常用定义在参照构形截面上的名义应力率 $\dot{t}_{ij}$ 来建立失稳边值问题,(7.3) 式成为

$$\begin{aligned} \dot{t}_{11} - \dot{t}_{22} &= [4\mu^* - (\sigma_1 + \sigma_2)] \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \dot{t}_{12} &= [\mu \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}] \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + [\mu - \frac{\sigma_1 \pm \sigma_2}{2}] \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \dot{t}_{21} & \end{aligned} \quad (7.5)$$

此外,名义应力率应满足增量平衡方程

$$\partial \dot{t}_{ij} / \partial x_j = 0 \quad (7.6)$$

式(7.6),(7.5)及(7.2)式联立可得到关于速度势的控制方程:

$$[\mu + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}] \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2(2\mu^* - \mu) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + [\mu - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}] \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0 \quad (7.7)$$

微分方程(7.7)式的类型与弹塑性失稳模式密切相关。设 φ 的形式解为 $\varphi = F(kx_1 + x_2)$,则可由特征根 k 的取值来判断其类型,进而求得失稳的临界值。将 φ 形式解代入方程(7.7)式中,可以得到

$$k = \pm \{ [\mu - 2\mu^* \pm \sqrt{(\mu - 2\mu^*)^2 - \mu^2 + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2}] / [\mu + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}] \}^{1/2} \quad (7.8)$$

对非软化材料 ($\mu^*, \mu > 0$) 的轴压占优变形 ($|\sigma_1| > |\sigma_2|$), k 的复实特征有下述三类情况:

(1) 椭圆型方程(E), K 无实根,这时有如下两种情况,

$$EI: \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\mu^*} \leq \frac{\mu}{\mu^*} \leq 1 + (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*})^2 \leq 2 \quad (k \text{ 均为虚根}) \quad (7.9)$$

$$EC: \frac{\mu}{\mu^*} \geq 1 + (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*})^2 \quad (k \text{ 为共轭复根}) \quad (7.10)$$

(2) 双曲型方程(H), k 全为实根

$$2 \leq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2\mu^*} \leq \frac{\mu}{\mu^*} \leq 1 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*}\right)^2 \quad (7.11)$$

(3) 抛物型方程 (p), k 为两个实根和两个复根

$$\mu \leq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} \quad (7.12)$$

根据不同类型方程的失稳条件, 图 7.1 绘出了在参数空间 $(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{4\mu^*}, \frac{\mu}{2\mu^*})$ 上弹塑性失稳的诸特征区域。方程(7.7)的椭圆型区域内的压缩失稳为表面失稳, 其对应的扰动解从材料表面向内衰减。 E 中的两个分域 EI 和 EC (式(7.9) 及式(7.10)) 分别表示从自由表面形成的水平破坏带和倾斜破坏带。在方程(7.7)的双曲型区域可出现由内部失稳而形成的贯穿折曲带。对(7.12)式的抛物型区域, 由于要求大于弹性剪切模量 2 倍的失稳应力, 故很难发生这种失稳。下面将结合单向纤维增强复合材料在单向受压下 ($\sigma_1 = \sigma < 0, \sigma_2 = 0$) 的内部失稳及表面失稳情况进行较为详尽的讨论。

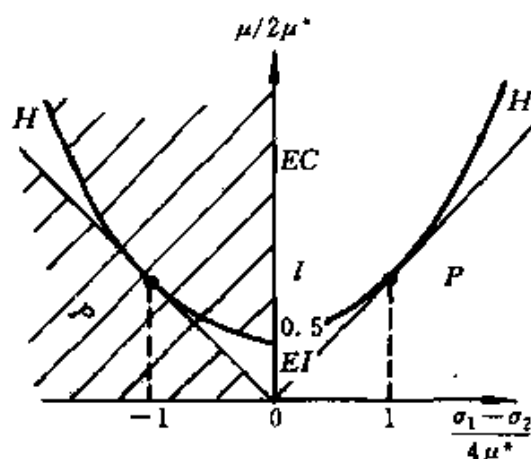


图 7.1 弹塑性失稳的诸特征区域^[2]

§ 7.3 贯穿型失稳及折曲带的形成

实验观察到贯穿折曲带的破坏模式因纤维的韧脆特性不同而

不同。在脆性纤维复合材料的折曲带内,纤维节节碎断,而基体材料依然完整;而在韧性纤维复合材料的折曲带内,基体碎裂而纤维

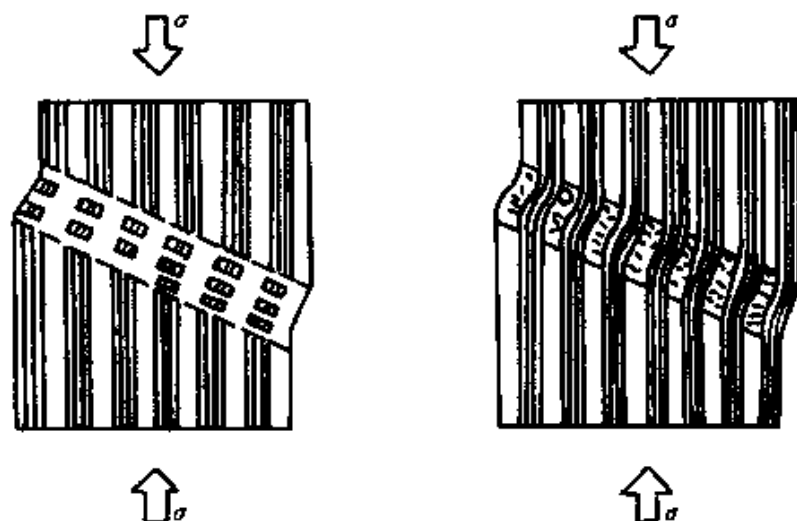


图 7.2 复合材料中形成的贯穿折曲带,左:脆性纤维/韧性基体;
右:韧性纤维/脆性基体

发生塑性屈曲,如图 7.2 所示。

现讨论图 7.3 所示的纤维/基体呈层状排列的无限大复合材料在平面应变压缩时的贯穿折曲带的形成,即在(7.11)式的限制

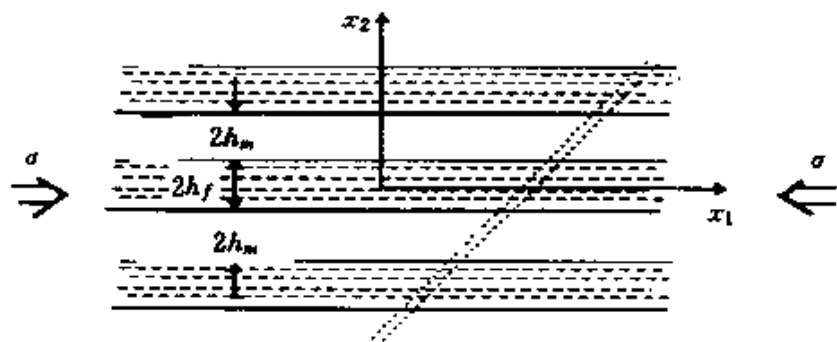


图 7.3 周期性层状复合材料与贯穿折曲带

区域内求解方程(7.7)。

考察在纤维及基体中如下分片连续的失稳模式:

$$\varphi = g(x_2) \cos \frac{\pi m}{\lambda} x_1 \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.13)$$

式中, λ 为纤维方向的速度场变化波长。将每相的 φ 表达式(7.13)代入(7.2), (7.5) 及(7.7)式, 所得结果分别注以下标“ f ”和“ m ”, 再将结果代入纤维/基体界面的连续条件 $[u_i] = [\dot{t}_{ij}] = 0, [u_i] = u_{fi}^f - u_{mi}^m$, 可得如下失稳应力的特征方程:

$$(k_{2f} - k_{1f})(k_{2m} - k_{1m})F(k_{1\gamma}, k_{2\gamma}, \frac{h_\gamma}{\lambda}, \frac{\sigma_\gamma}{\mu_\gamma}) = 0 \quad (7.14)$$

式中, 下标 γ 可取为“ f ”及“ m ”, 且有

$$\begin{aligned} K_{1\gamma, 2\gamma} &= \beta_{1\gamma} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - (\beta_{2\gamma}/\beta_{1\gamma})^4}} \quad \gamma = f, m \\ \beta_{1\gamma}^2 &= (\mu_\gamma - 2\mu_\gamma^*)/(\mu_\gamma - \frac{1}{2}\sigma_\gamma), \beta_{2\gamma}^2 = (\mu_\gamma + \frac{1}{2}\sigma_\gamma)/(\mu_\gamma - \frac{1}{2}\sigma_\gamma) \end{aligned} \quad (7.15)$$

其中, F 为 $K_{1\gamma}, K_{2\gamma}, \frac{h_\gamma}{\lambda}, \frac{\sigma_\gamma}{\mu_\gamma}$ 的已知函数, 对于长波长失稳模式 ($h_\gamma/\lambda \ll 1$), 在可能应力范围内 F 不为零。式(7.14)所对应的两个特征根 $k_{2f} = k_{1f}$ 和 $k_{2m} = k_{1m}$ 分别给出纤维增强复合材料由纤维和基体弹塑性失稳所触发的临界应力为

$$|\sigma_\gamma| = 4\mu_\gamma \sqrt{\frac{\mu_\gamma^*}{\mu_\gamma} (1 - \frac{\mu_\gamma^*}{\mu_\gamma})} \quad \gamma = f, m \quad (7.16)$$

此结果正好落在图 7.1 左半部 EC 区和 H 区的交界线上。由(7.16)式及 $|\sigma_\gamma|$ ($\gamma = f, m$) 的值域可估计 μ_γ^*/μ_γ 的取值范围

$$\frac{1}{2} [1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_y^2}{4\mu^2}}] \leq \frac{\mu^*}{\mu} \leq \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 - \frac{\sigma_b^2}{4\mu^2}}] \quad (7.17)$$

式中, σ_y 和 σ_b 分别为材料单元的屈服极限和强度极限。表 7.1 中列出了典型树脂复合材料的 μ^*/μ 值。表中数据表明, 失稳时的 μ^*/μ 值一般很小。

如果我们采用如下二次函数曲线来拟合纤维及基体单相材料的压缩应力-应变关系:

$$|\sigma| = \begin{cases} E|\epsilon| & 0 \leq |\epsilon| \leq \epsilon_y \\ \sigma_b - (\sigma_b - \sigma_y) \left(\frac{\epsilon_b - |\epsilon|}{\epsilon_b - \epsilon_y} \right)^2 & \epsilon_y \leq |\epsilon| \leq \epsilon_b \end{cases} \quad (7.18)$$

表 7.1 单相构元强塑性失稳时的 μ^*/μ 值

材料名称	环氧树脂 ¹⁾	聚酯 ²⁾	碳纤维 ²⁾	玻璃纤维 ²⁾	Kevlar49 ²⁾
压缩性能 σ_b	122	122	1500	1400	/
指 标 σ_R	40	71	/	/	450
(MPa) μ	1493	1286	135700	29000	46800
$\mu^*/\mu(10^{-4})$	≤ 4.18	≤ 5.63	≤ 0.08	≤ 1.45	≈ 0.06

1) Kulkarni 等(1973), 2) Piggott 与 Harris(1980)

塑性硬化模量为 $H^{-1} = \frac{d|\sigma|}{d|\epsilon|} - E^{-1}$, 而且也可将(7.18)式塑性变形阶段 $|\sigma|$ 及 μ^*/μ 的关系表示为

$$|\sigma|/\sigma_y = \omega_\sigma - \frac{(\omega_\epsilon - 1)^2}{\omega_\sigma - 1} \left(\frac{\mu^*/\mu}{3 - \mu^*/\mu} \right)^2 \quad (7.19)$$

其中

$$\omega_\sigma = \frac{\sigma_b}{\sigma_y} > 1, \quad \omega_\epsilon = \frac{\epsilon_b}{\epsilon_y} > 1 \quad (7.20)$$

分别表示材料的硬化和延展程度, 利用(7.16)式及(7.19)式可求得失稳时的临界应力 $|\sigma|$ 及 μ^*/μ 值。举固化温度为 80°C 经 3 小时冷却到室温所得到的聚酯为例, 其压缩本构参数为 $E = 3000\text{MPa}$, $\mu = 1000\text{MPa}$, $\sigma_y = 60\text{MPa}$, $\sigma_b = 120\text{MPa}$, $\epsilon_y = 0.02$, $\epsilon_b = 0.075$, 因此可求得: $\mu^*/\mu = 9.01 \times 10^{-4}$, $|\sigma_c| = 119.99\text{MPa}$, 失稳时 μ^*/μ 值很小, $|\sigma_c|$ 接近于 σ_b 。

通常纤维和基体并不会同时达到各自的失稳应力值, 由(7.14)式可知, 无论是纤维还是基体, 任一相的失稳均应导致复合材料的失稳。因此, 复合材料的失稳应力应等于基体或纤维失稳应力的较小值。对于常用的单向纤维增强复合材料, 往往是纤维先达到临界失稳状态, 根据混合律, 可以得到复合材料的失稳应力为

$$|\sigma_c| = |\sigma_{cf}|v_f + (1 - v_f)|\sigma_m(\epsilon_{cf})| \quad (7.21)$$

式中, σ_{cf} 为纤维失稳应力, ϵ_{cf} 为对应于失稳状态复合材料的宏观应变。利用(7.21)式预测的复合材料失稳应力同实验值比较列于表 7.2 中。

表 7.2 复合材料临界压应力的理论与实测值

复合材料	Kevlar49/ 环氧	Kevlar49/ 聚酯	碳纤维 / 聚酯	玻璃纤维 / 聚酯
V_f	0.6	0.3	0.3	0.3
$ \sigma_c $ 理论值 ¹⁾ (MPa)	278 ± 8	160 ± 24	474 ± 24	444 ± 24
$ \sigma_c $ ^[1] (MPa)	275	/	/	/
$ \sigma_c $ ^[2] (MPa)	/	173 ± 6	500 ± 50	460 ± 60

1) 上限(+号)对应于 $|\sigma_m| = \sigma_{ym}$, 下限(-号)对应于 $|\sigma_c| = 0$

[1] Kulkarni 等(1973), [2] Piggott 与 Harris(1980)

§ 7.4 表面失稳与扩展折曲带

表面失稳是应用中常见的破坏现象。材料的压缩破坏起源于表面, 随承压增加而逐渐向内延伸, 直至完全破坏, 本节将较为详尽阐述表面细观失稳理论, 并预报压缩失稳临界应力, 最后, 依据折曲带扩展的细观机制建立后屈曲模型。

一、压缩失稳的均匀化模型

考虑图 7.4(a)所示复合材料的单向压缩问题, 其材料单元在变形前及变形后的细观结构如图 7.4(b)及(c)所示。由于纤维或基体的层厚($\approx 10^{-4}\text{m}$)远小于面内几何尺寸, 且纤维层的刚度远大于基体的刚度, 这样可将单向纤维增强复合材料作均匀化处理。

发生弹塑性失稳时, 纤维和基体各自的名义应力率和速度场由(7.5)式给出。由于材料构元的层厚很小, 可将纤维与基体内的应力率和速度梯度视为沿厚度不变。这时在相邻两相间的连接条

件为

$$[t_{2i}] = 0, [\frac{\partial v_i}{\partial x_1}] = 0, [\frac{\partial v_2}{\partial x_2}] = 0, \quad i = 1, 2 \quad (7.22)$$

其中后两个条件由速度场连续条件 $[v_i] = 0$ 及不可压缩条件引伸而得,即速度梯度中仅有 $\partial v_1/\partial x_2$ 可以间断。在(7.22)的条件下对相构元方程作体平均后,可得到与§7.2中讨论的方程形式完全一样的公式。其中有关的弹性模量可表示成

$$\mu^* = v_f/(\mu_f^{-1} + 2H_f^{-1}) + (1 - v_f)/(\mu_m^{-1} + 2H_m^{-1})$$

$$\mu = \frac{\mu_m + \frac{1}{2}|\sigma_m|}{1 - v_f} - \frac{1}{2}|\sigma| \quad (7.23)$$

且宏观本构响应为各向异性,在自由表面的边界条件为

$$t_{2i}|_{x_2=0} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (7.24)$$

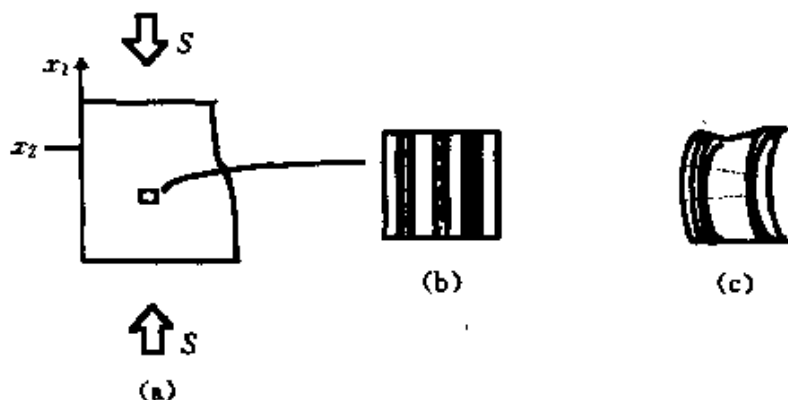


图 7.4 表面失稳的均匀化处理

二、弹塑性表面的失稳解

考察如(7.13)式所示的失稳模式,将其代入方程(7.7)式并在(7.9)及(7.10)式所对应的参数域上求解,便可得到具有下述特征的破坏带:

1. 水平破坏带(区域 EI)

$$\varphi \sim \{e^{iq_1 x_2}, e^{iq_2 x_2}\} \cos c x_1, \quad c = \frac{m\pi}{\lambda} \quad (7.25)$$

式中

$$q_{1,2} = \{ [2\mu^* - \mu \pm \sqrt{(2\mu^* - \mu)^2 - \mu^2 + \frac{1}{4}\sigma^2}] / (\mu - \frac{1}{2}\sigma) \}^{1/2} \quad (7.26)$$

2. 倾斜破坏带(区域 EC)

$$\varphi \sim \{ \sin[c(px_2 \pm x_1)], \cos[c(px_2 \pm x_1)] \} e^{qx}, c = \frac{m\pi}{\lambda} \quad (7.27)$$

式中

$$p, q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\pm (2\mu - 4\mu^*) / (2\mu - \sigma) + \sqrt{(2\mu + \sigma) / (2\mu - \sigma)} \right]^{1/2} \quad (7.28)$$

将(7.25)及(7.27)式代入(7.2)及(7.5)式中,并利用边界条件(7.24)式可得到两种情况下的失稳压力同为

$$\frac{2\mu^*}{\mu} = \frac{|\sigma|}{2\mu} \left\{ \sqrt{(1 + \frac{|\sigma|}{2\mu}) / (1 - \frac{|\sigma|}{2\mu})} - 1 \right\} \quad (7.29)$$

图 7.5 中显示了由(7.25)及(7.27)式所分别刻划的水平 and 倾斜表面失稳模式。由(7.9)式及(7.29)式可知,形成水平破坏带

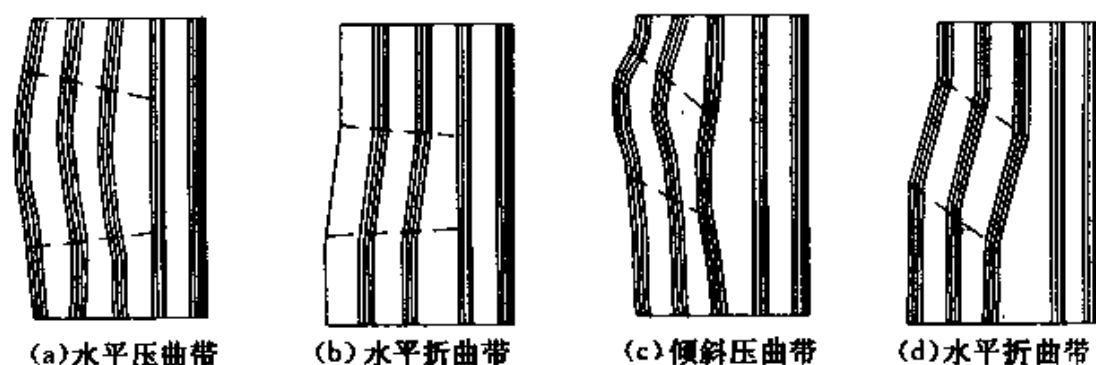


图 7.5 表面失稳破坏模式

的临界压应力与 μ, μ^* 同量级,因此,在不考虑缺陷的情况下不可能出现这种模式。但由(7.10)及(7.29)确定的倾斜破坏带却是完全可能实现的,此时要求 μ^* / μ 较小。由于纤维和基体界面抗剪能

力较弱,一般情况下形成图 7.5(d) 所示的倾斜折曲带。

在 μ^*/μ 很小情况下,可将(7.29)式近似表示为

$$|\sigma_c| = 2\sqrt{2}\mu[\sqrt{\mu^*/\mu} + o(\frac{\mu^*}{\mu})] \quad (7.30)$$

按照同样的近似方法,可以将上节讨论过的形成贯穿折曲带的临界压应力表示成:

$$|\sigma_c| = 4\mu[\sqrt{\mu^*/\mu} + o(\frac{\mu^*}{\mu})] \quad (7.31)$$

值得注意的是,由于 μ^*/μ 也是 $|\sigma_c|$ 的函数,应结合本构关系联立求解 $|\sigma_c|$ 及 μ^*/μ 值。如采用(7.18)式所示的二次拟合曲线,则可由交点法求出内部失稳(II)与表面失稳(SI)的临界压应力,如图 7.6 所示,其中, $\sigma_y/\mu = 0.2, \omega_c = 4$ 。

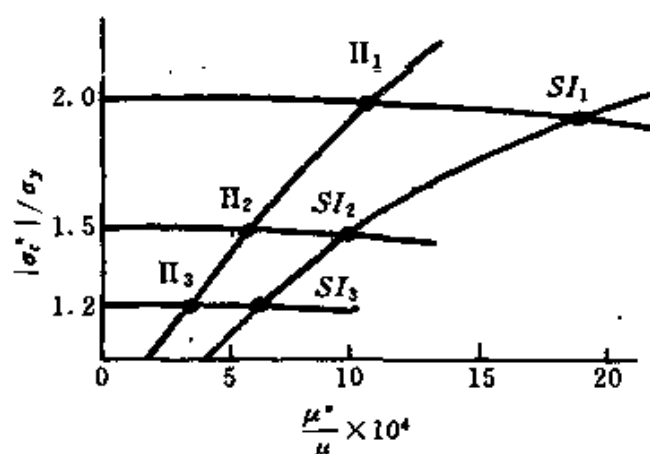


图 7.6 内部失稳与表面失稳的临界压应力

三、后层曲模型

现讨论表面失稳的后屈曲过程。当压应力超过表面失稳的临界值后,在自由表面附近产生向内呈指数衰减的倾斜折曲带,在带内至少有一相材料严重损伤并发生破坏。下面以折曲带内基体已经破碎,纤维屈曲桥联为例展开讨论。折曲带的桥联机制与桥联力模型如图 7.7(a), (b) 所示。

1. 桥联力的计算

当复合材料在压缩载荷作用下,表面开始失稳后,基体已经发生破碎,面纤维只是产生一定程度的屈曲,并未断裂。这些桥联纤维将限制失稳过程的继续,即失稳折曲带的扩展。为了定量分析桥联纤维的作用,必须首先根据不同纤维不同的本构性能计算纤维中所承担的载荷。

考虑纤维材料具有一般的塑性强化性能,根据图 7.7(b)所示的 Hutchinson(1974)^[17]模型,在临界压应力 σ_f 下突然释放纤维的

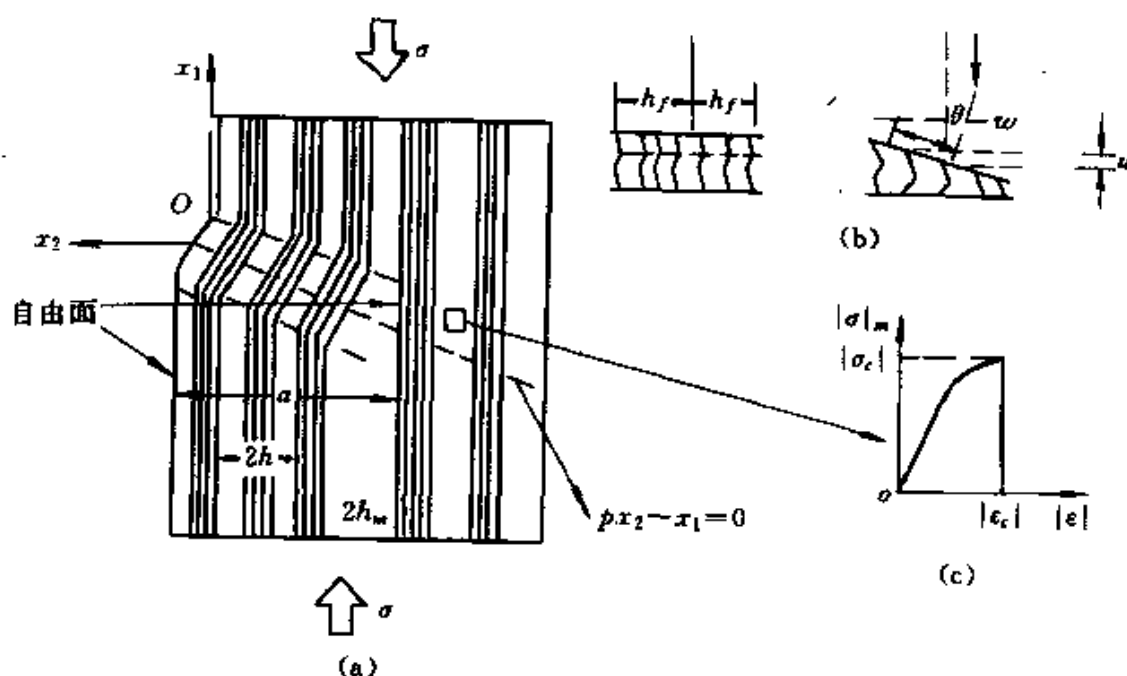


图 7.7 倾斜折曲带的桥联机制

基体约束,得到桥联应力 σ_B 和折曲带闭合位移 δ 的近似表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_B / \sigma_c^0 &= 1 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + O(\theta^3) \\ \delta / 2h_f &= b_1 \theta + b_2 \theta^2 + O(\theta^3) \end{aligned} \quad (7.32)$$

式中

$$a_1 = \frac{1}{4l}[(1-t_c)(1-b_1)^2 - 4t_c b_1] \frac{E_f}{\sigma_f}$$

$$a_2 = -2\left[\frac{1+t_c}{1-t_c} - b_1\right] \frac{la_1 - \frac{t_c^1}{48l^2}(3+4b_1+6b_1^2-5b_1^4)}{1-b_1^2} \cdot \frac{E_f}{\sigma_f}$$

$$(1-b_1)^2(2+b_1) = (12l^2 \frac{\sigma_f}{E_f} - 4t_c)/(1-t_c) \quad (7.33)$$

$$b_2 = 2la_2/[1+t_c - (1-t_c)b_1] + \frac{1}{2}l$$

$$\sigma_c^0 = \sigma_f v_f \sin \beta, l = \frac{w}{b_f}, t_c = \frac{E_t}{E_f}, t_c^1 = \frac{1}{E_f} \left(\frac{dE_t}{d\epsilon} \right)_c$$

式中, E_t 为桥联纤维的切线模量, 而 σ_f 和 E_t 分别为表面失稳时桥联纤维压应力和切线模量临界值。 w 为折曲带的半宽, 杨卫和魏悦广^[3]对理想塑性纤维的情况给出 w 的估算式为

$$w/h_f = l = (6\epsilon_{fy})^{-1/2}[(1-b_1)\sqrt{1+b_1/2}] \quad (7.34)$$

式中, ϵ_{fy} 为纤维的屈服应变。由上式预测的 w 值与 Budiansky^[18] (1983) 基于纤维弹性弯曲所得的结果相近, 且与 Kulkarni, Rice 及 Rosen (1973)^[13] 对于 Kevlar 49/环氧的实验观测值相吻合。

为考虑纤维塑性硬化的影响, 采用 Ramberg-Osgood 型应力-应变关系如下,

$$\epsilon/\epsilon_0 = \sigma_f/\sigma_0 + \alpha(\sigma_f/\sigma_0)^n \quad (7.35)$$

式中, $\sigma_0 = E_f \epsilon_0$ 为参考应力值, $\alpha \geq 0, n > 1$, n 值增加表示材料塑性硬化程度的降低。由 (7.33) 式的最后两式及 (7.35) 式可导出,

$$t_c = [1 + \alpha n (\frac{\sigma_f}{\sigma_0})^{n-1}]^{-1} \quad t_c^1 = -\alpha n(n-1) \frac{t_c^3}{\epsilon_0} (\frac{\sigma_f}{\sigma_0})^{n-2} \quad (7.36)$$

将 (7.36) 式代入 (7.32) 式可以得到 $\sigma_B-\theta$ 及 $\delta-\theta$ 曲线, 在如下三组材料参数下如图 7.8 所示。

$$(1) \alpha = 0.4, n = 1.5, \frac{\sigma_f}{\sigma_0} = 4$$

$$\epsilon_0 = 0.005, l = 3, t_c = 0.45, t_c^1 = -2.82$$

$$(2) \alpha = 0.4, n = 6, \frac{\sigma_f}{\sigma_0} = 1.4$$

$$\varepsilon_0 = 0.005, l = 3, t_c = 0.072, t'_c = -3.43$$

$$(3) \alpha = 0.4, n = 15, \frac{\sigma_f}{\sigma_0} = 1.1$$

$$\varepsilon_0 = 0.005, l = 3, t_c = 0.042, t'_c = -4.31$$

它们分别对应纤维硬化程度较高、中等和很低的桥联纤维特征。图 7.8 表明,刚形成折曲带时,桥联纤维的承载能力与纤维偏转角 θ 之间的关系与纤维硬化行为有关。对硬化程度较高的纤维 ($n = 1.5$), σ_B 随 θ 增加而增加;对硬化程度较低的纤维 ($n = 6, 15$), σ_B 随 θ 增加而下降。

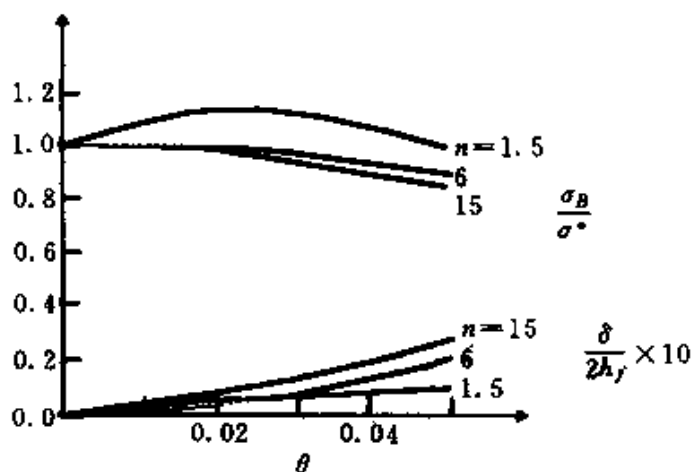


图 7.8 桥联参量的初始后屈曲响应 ($n=1.5, 6, 15$)^[2]

2. 扩展折曲带的 J 积分描述

考察如图 7.9 所示的折曲带,为了建立折曲带失稳扩展的条件,根据杨卫及魏悦广的研究结果,可以将折曲带当成与裂纹类似的缺陷,而围绕其尖端的 J 积分达到某一临界值时,折曲带将失稳扩展,利用这一模型,可以类似于脆性材料的增韧模型考虑桥联纤维的增强作用。

J 积分可以用如下公式定义

$$J = \int_r (U dy_2 - T_i \frac{du_i}{dy_1} dl) \quad (7.37)$$

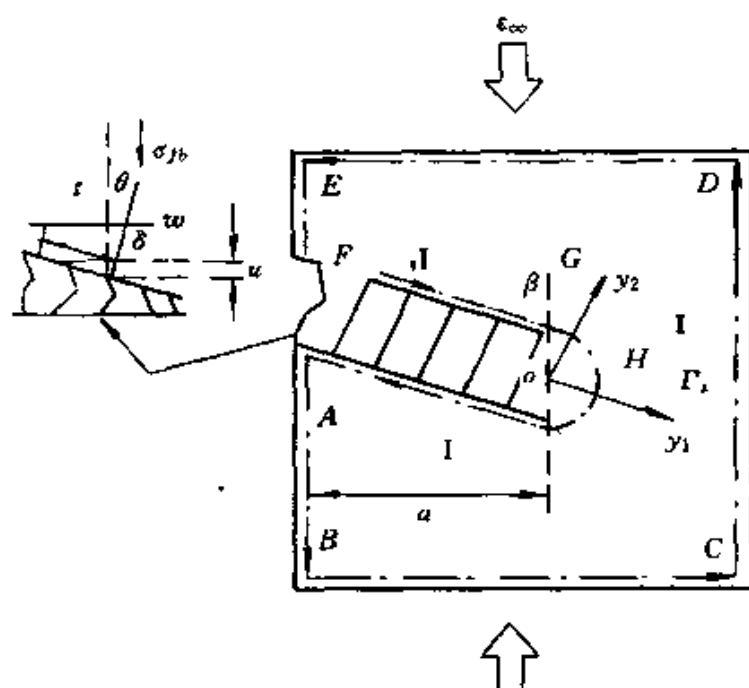


图 7.9 J 积分路径图

式中, $U = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}$ 为应变能密度, T_i 和 u_i 分别为沿积分路径 Γ 的面力和位移矢量, Γ 可以是围绕折曲带尖端的任一路径。类似于断裂力学中的证明过程, 我们同样可以证明在不卸载条件下, 将折曲带尖端奇点除外, 作一封闭曲线如图 7.9 中的 $ABCDEFGHIA$, 由于该闭合域内无奇点, 因此, 沿这一封闭曲线的积分 (7.37) 式等于零。也即是说, 围绕折曲带尖端某一不封闭路径作 (7.37) 式的积分, 其值应与积分路径无关。

若基体材料可由 (7.18) 式所给的应力 - 应变关系描述, 且近似取临界损伤应变 $|\epsilon_c|$ 为 ϵ_{mb} , 则在折曲带尖端耗散的能量释放率为

$$J_{tip} = w(1 - \nu_f) \sin \beta \left[E_m \epsilon_{my}^2 + \frac{2}{3} (2\sigma_{mb} + \sigma_{my}) (\epsilon_{mb} + \epsilon_{my}) \right] + (1 - \nu_f) \sigma_{mb} \delta_f \sin \beta \quad (7.38)$$

上式左边 J_{tip} 表示围绕折曲带尖端 IHG 的 J 积分, 它也等于折曲带扩展的应变能释放率, 这一释放率应等于折曲带扩展所耗散的

能量, (7.38) 式也被称为 J 准则。

根据 J 积分与路径无关原理, 可以得到

$$J_{\infty} = J_{up} + J_B \quad (7.39)$$

式中, J_{∞} 表示沿外环 $ABCDEF$ 的 J 积分, J_B 表示沿折曲带一侧路径积分, 它也等于由于桥联而导致材料折曲带扩展阻力的增加。

$$J_B = \int_0^{\delta_0} \sigma_B d\delta \quad (7.40)$$

式中, δ_0 为自由表面处折曲带的闭合位移。将 (7.32) 式代入 (7.40) 式中, 可以导出

$$J_B = 2\sigma_c^0 h_f \left\{ \frac{\delta_0}{2h_f} + \frac{a_1}{2b_1} \left(\frac{\delta_0}{2h_f} \right)^2 + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{3b_1^3} \left(\frac{\delta_0}{2h_f} \right)^3 + O\left[\left(\frac{\delta_0}{2h_f} \right)^4\right] \right\} \quad (7.41)$$

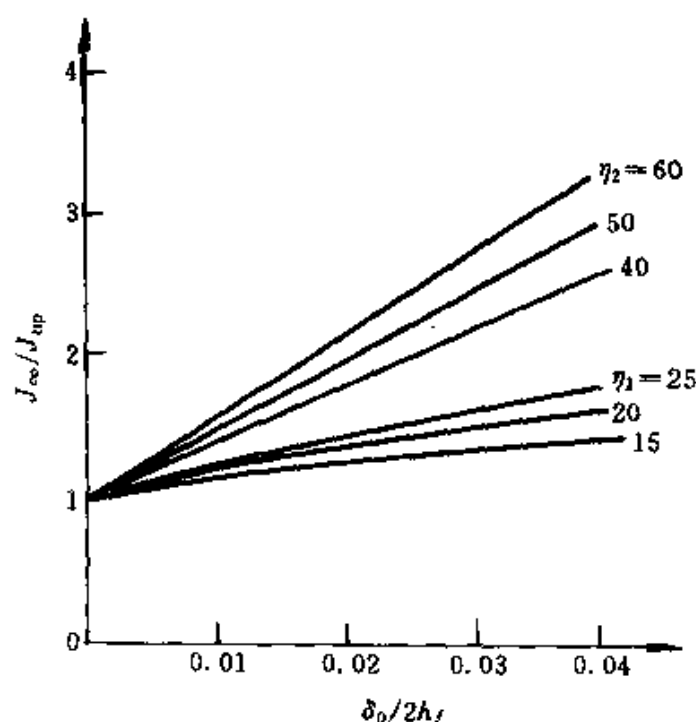


图 7.10 桥联增韧曲线^[2]

进而可以求得纤维桥联增韧比为

$$J_{\infty}/J_{\text{up}} \approx 1 + \eta_1 \left\{ \frac{\delta_0}{2h_f} + \frac{a_1}{2b_1} \left(\frac{\delta_0}{2h_f} \right)^2 + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{3b_1^3} \left(\frac{\delta_0}{2h_f} \right)^3 \right\} \quad (7.42)$$

影响因子 η_1 定义为

$$\eta_1 = \frac{2\sigma_f v_f / (1 - v_f)}{l E_m \epsilon_{my}^2 \left[1 + \frac{2}{3} (w_o + 1)(w_e - 1) \right] + E_m \epsilon_{my} w_o \delta_i / h_f} \quad (7.43)$$

其中基体材料的 w_o, w_e 的定义见(7.20)式。对 Kevlar 49/ 环氧复合材料, 可取 $\sigma_f = \sigma_{fs}$, 当 $v_f = 0.6, l = 3$ 时可算出 $\eta_1 \approx 20$ (杨卫和魏悦广, 1992)。若将上部分中第三组数据所对应的 a_1, a_2, b_1, b_2 代入(7.42)式, 可绘出不同 η_1 值下桥联增韧比 J_{∞}/J_{up} 随 $\delta_0/2h_f$ 变化曲线, 如图 7.10 所示。可见纤维桥联使折曲带耗能显著升高。

§ 7.5 压缩失稳模式的缺陷敏感性

本节在复合材料的基体中引入缺陷, 以考察它们对复合材料压缩失稳模式的影响。由于加工过程的限制, 复合材料及其结构往往会含有诸如微裂纹、微孔洞等初始缺陷, 而且随着载荷的增加, 缺陷也会萌生及演化扩展。根据魏悦广、杨卫和黄克智的研究结果(1994)^[2], 可以简单将这些缺陷的影响用基体剪切模量 μ_m 的减少来表征。即可以将含缺陷材料的剪切模量表示成 $\varphi_m \mu_m$, 其中 $0 < \varphi_m < 1$, 并进一步假设 φ_m 不是空间的位置函数。

一、含缺陷的表面失稳解

同上面讨论的方法类似, 可以导出形成水平破坏带和倾斜破坏带的参数域为:

$$\text{水平破坏带} \quad \frac{|\sigma|}{2\mu_y^*} \leq \frac{\mu_z}{\mu_p^*} \leq 1 + \left(\frac{\sigma}{4\mu_p^*} \right)^2 \leq 2 \quad (7.44)$$

$$\text{倾斜破坏带} \quad \frac{\mu_z}{\mu_p^*} > 1 + \left(\frac{\sigma}{4\mu_p^*} \right)^2 \quad (7.45)$$

其中, 含损伤材料的模量分别为

$$\mu_p = \frac{\varphi_m \mu_m + \frac{1}{2} |\sigma_m|}{1 - v_f} - \frac{1}{2} |\sigma| \quad (7.46)$$

$$\mu_p^* = v_f / (\mu_f^{-1} + 2H_f^{-1}) + (1 - v_f) / (\mu_m^{-1} + 2H_m^{-1}) \quad (7.47)$$

两种情况下失稳载荷表达式同为

$$2\mu_p^* / \mu_p = \frac{|\sigma|}{2\mu_p} \left\{ \sqrt{\left(1 + \frac{|\sigma|}{2\mu_p}\right) / \left(\frac{|\sigma|}{1 - 2\mu_p}\right)} - 1 \right\} \quad (7.48)$$

二、含缺陷的表面失稳模式

图 7.11 在 $\mu_p^* / \mu_p \sim |\sigma| / 2\mu_p$ 参数平面上绘制出由 (7.44), (7.45) 及 (7.11), (7.12) 式所对应的 EI , EC , H 和 P 区域, 并在该

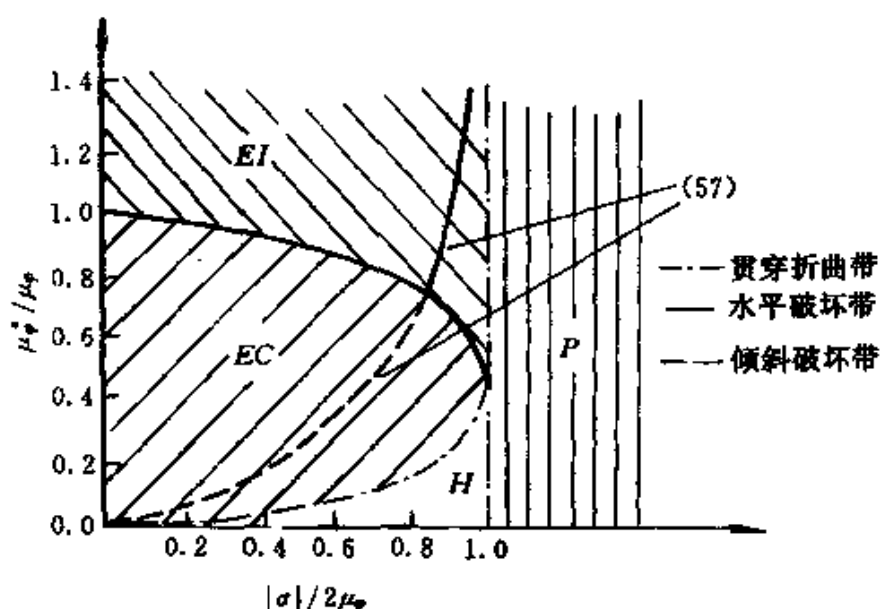


图 7.11 含缺陷表面失稳诸破坏模式的特征参数域

参数平面上绘制了由 (7.48) 式所决定的失稳载荷曲线。由该曲线与 EI 及 EC 区分界线的交点值可定出形成水平破坏带的区域为

$$0.8 < \frac{|\sigma|}{2\mu_p} < 1 \quad \text{或} \quad 0.8 < \frac{\mu_p^*}{\mu_p} < \infty \quad (7.49)$$

而形成倾斜破坏带的区域为

$$0 < \frac{|\sigma|}{2\mu_p} < 0.8 \quad \text{或} \quad 0 < \frac{\mu_p^*}{\mu_p} < 0.8 \quad (7.50)$$

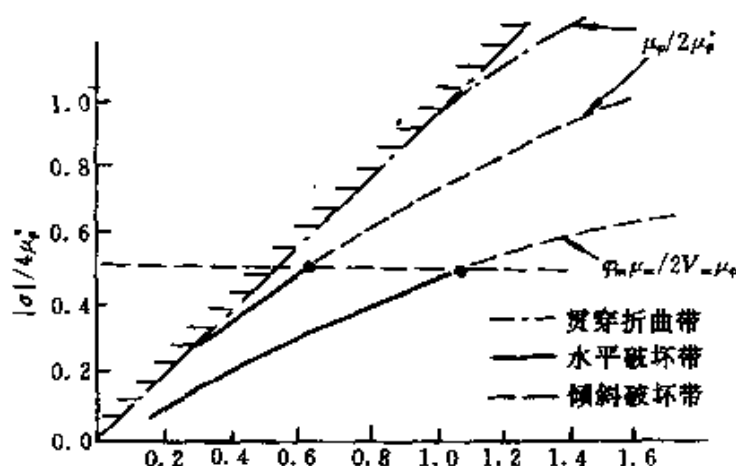


图 7.12 失稳压力与破坏模式随基体损伤程度的变化

将材料所具有的应力-应变曲线折算为 $\mu_p^*/\mu_p \sim |\sigma|/2\mu_p$ 并绘制在图 7.11 中, 这些曲线与 (7.48) 曲线的交点即可求出失稳压力和失稳模式。其中 (7.48) 式定出的曲线左下段对应于倾斜破坏带, 右上段对应于水平破坏带。

从图 7.11 中也容易看出, 失稳时的 μ_p^*/μ_p 值是决定失稳模式的关键参数, 而 μ_p^*/μ_p 又取决于 $|\sigma_c|/\phi_m \mu_m$ 值, 后者的大小决定了失稳模式是水平破坏带还是倾斜破坏带。当基体中无损伤或损伤很少时, ϕ_m 接近于 1, 这时的失稳模式仅可能为倾斜带。当损伤较为严重, ϕ_m 较小, 这将导致 μ_p^*/μ_p 的上升, 而导致水平带的出现成为可能, 当纤维体积含量较小时, 更容易出现水平带。

无疑, 基体损伤的出现将导致失稳应力的下降(图 7.12)。

三、抛物线型参数区域内的失稳压力

对一般的纤维增强复合材料, 在不考虑缺陷的情况下不会产生定解方程 (7.7) 为抛物型的情况, 因该情况要求失稳压力超过材料剪切模量的两倍, 但当损伤十分严重, 满足如下关系:

$$2\mu_p \leq |\sigma| \quad (7.51)$$

可以出现失稳情况, 其失稳载荷范围绘制在图 7.11 中影线区域。

四、水平破坏带的失稳压力与 φ_m 表达式

水平破坏带形成的失稳压力由(7.49)式及(7.44)式求得为

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{\varphi_m \mu_m + \frac{1}{2} |\sigma_m|}{1 - \nu_f} < |\sigma| < \frac{\varphi_m \mu_m + \frac{1}{2} |\sigma_m|}{1 - \nu_f} \quad (7.52)$$

式中, $|\sigma_m|$ 为失稳时基体的压应力, 一般情况下, $\frac{1}{2} |\sigma_m|$ 相对于 $\varphi_m \mu_m$ 可忽略不计, 因此, (7.52) 式简化为

$$\frac{8}{9} \cdot \frac{\varphi_m \mu_m}{1 - \nu_f} < |\sigma| < \frac{\varphi_m \mu_m}{1 - \nu_f} \quad (7.52)'$$

可以采用有效介质的理论求得含损伤的基体材料有效模量, 并进而求得 φ_m 值。

§ 7.6 水平破坏带的扩展

在前文中, 采用桥联模型及 J 积分准则分析了倾斜折曲带扩展问题, 当复合材料损伤严重时, 可形成水平破坏带这一失稳模式, 采用与倾斜折曲带扩展问题一样的分析方法, 当纤维为塑性硬化材料时, 可以导出桥联增韧比为

$$J_{\infty}/J_{\text{tip}} \approx 1 + \eta_2 \left\{ \frac{\delta_0}{2h_f} + \frac{a_1}{2b_1} \left(\frac{\delta_0}{2h_f} \right)^2 + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{3b_1^3} \left(\frac{\delta_0}{2h_f} \right)^3 \right\} \quad (7.53)$$

式中

$$\eta_2 = \frac{2\sigma_f \nu_f / (1 - \nu_f)}{l \varphi_m E_m \varepsilon_{my}^2 \left[1 + \frac{2}{3} (2w_s + 1)(w_s - 1) \right] + \varphi_m E_m \varepsilon_{my} w_s \frac{\delta_0}{h_f}} \quad (7.54)$$

参 考 文 献

- [1] W. Yang and Y. G. Wei, *Int. J. Damage Mech.*, 1992, 1: 80.
- [2] 魏悦广, 杨卫, 黄克智, 中国科学, 1994, A24: 768.

- [3] 魏悦广、杨卫,航空学报,1992, A13: 388.
- [4] Y. G. Wei and W. Yang, *Acta Mechanica Sinica*, 1993, 9: 33.
- [5] N. F. Dow and I. J. Gruntfest, TIS R60SD 389, General Electric Comp., Space Sciences Lab. Jane, 1960.
- [6] B. W. Rosen, Fiber Composite Materials, Am. Soc. Metals Seminar, chapter 3, Am. Soc. Metals, 1965.
- [7] H. Schuerch, *AIAA J.*, 1996, 4: 102.
- [8] T. Hagashi, *Proc. XVI Japan Nat. Congre. Appl. Mech.*, 1966.
- [9] J. R. Larger and R. June, *J. Comp. Mater.*, 1969, 3: 48.
- [10] J. G. Pavis, Jr., *NASA TN D5697*, 1970.
- [11] E. M. De Ferran and B. Harris, *J. Comp. Mater.*, 1969, 3: 48.
- [12] L. B. Greszeuik, *AFML-TR-72-107*, 1973.
- [13] S. V. Kulkarni, J. S. Rice and B. W. Rosen, *NASA-CR-112334*, 1974.
- [14] P. O. Ewins and R. T. Potter, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 1980, A294: 507.
- [15] N. Hancox, *J. Mater. Sci.*, 1975, 10: 234.
- [16] M. R. Piggott and B. Harris, *J. Mater. Sci.*, 1980, 15: 2523.
- [17] J. W. Hutchinson, *Adv. in Appl. Mech.*, 1974, 14.
- [18] B. Budiansky, *Computers & Structures*, 1983, 16: 3.
- [19] B. Budiansky and N. A. Fleck, *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, 41: 183.

第八章 压电复合材料的细观力学模型

压电材料是一种能够实现机械能与电能之间相互转换的机敏材料。由它制成的传感器、滤波器、延迟器和致动器等关键的功能元件已经在电子技术、医疗设备和机械工程等现代工业的各个不同领域中得到了广泛的应用。然而,由于多数压电材料固有的脆性特征以及诸如裂纹、孔洞、二相颗粒等缺陷的存在,往往导致材料在力场和电场的作用下过早的失效或破坏。另外,单相的压电材料,如压电陶瓷,往往不具有现代高新技术所需要的综合性能。因此,将固体力学的方法同电磁理论相结合研究压电元器件的可靠性,设计和制造高性能、多功能的压电复合材料已引起物理、材料和力学工作者的广泛关注和浓厚兴趣。

目前对压电材料耦合性能的研究主要集中于两个方面,即局部的弹性场、电场和宏观的有效电弹性能。前者注重于弄清楚含缺陷(如夹杂和裂纹)压电材料的弹性场与电场的分布特征,为压电元器件的可靠性分析提供理论依据,后者则是建立材料细观结构与宏观有效性能的定量关系,以期指导压电复合材料的设计和研制。最近,杜善义和梁军^[1]、Chung 和 Ting^[2],Sun^[3]等人推广各向异性弹性力学的 Stroh 方法^[4]研究了含椭圆夹杂或裂纹压电材料的二维问题,王彪^[5,31]、Chen^[2]和 Benveniste^[9],Dunn^[8]则得到了含椭球夹杂压电材料的三维耦合场,利用结构复合材料的细观力学方法,如第二章介绍的自治和 Mori-Tanaka 方法,文献[9~13]对压电复合材料的有效电弹性能进行了预报,本章将上述内容向读者做简单扼要的介绍。

§ 8.1 压电材料的基本方程

压电材料在外力的作用下产生电场,又可以在电场作用下发生变形,前者称为正压电效应,后者则为逆压电效应。材料是否具有压电性,通常取决于其晶体结构的对称性。一般说来有对称中心的晶体不可能具有压电性,而无对称中心的晶体都具有压电性,即压电材料本质上都是各向异性的。

对于压电材料,描述其力学行为和电学行为的物理量包括弹性位移 u_i ,应力张量 σ_{ij} ,应变张量 ϵ_{ij} ,电势 Φ ,电位移 D_i 和电场 E_i ($i, j=1, 2, 3$),它们满足压电方程,梯度方程和平衡方程。

压电方程 压电介质的压电性涉及到力学行为与电学行为之间的相互作用,在线性情况下,我们可以用两个力学量和两个电学量之间的关系,即压电方程来近似描述这种相互作用。如果选应变张量 ϵ_{ij} 和电场矢量 E_i 为独立变量,则压电方程为^[14]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijmn}^E \epsilon_{mn} - e_{mj} E_n \\ D_i &= e_{imn} \epsilon_{mn} + \alpha_{in}^* E_n \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

式中 C_{ijmn}^E ——常电场时的弹性刚度系数,称为短路弹性刚度系数,单位为 N/m^2 ;

e_{imn} ——压电应力系数,单位为 $\text{N/V} \cdot \text{m}$;

α_{in}^* ——常应变时的介电系数,称为夹持介电系数,单位为 F/m 。

采用矩阵符号来表示张量,可以使(8.1)变得相当简洁,用列阵表示应力和应变张量,其分量间的关系为

$$\sigma_p = \sigma_{ij}, (p = 1, 2, 3, 4, 5, 6; i, j = 1, 2, 3)$$

$$\gamma_p = \begin{cases} \epsilon_{ij} (i = j, p = 1, 2, 3) \\ 2\epsilon_{ij} (i \neq j, p = 4, 5, 6) \end{cases}$$

用矩阵 C 和 e 表示材料系数张量,其分量间关系为

$$\begin{cases} C_{pq}^E = C_{ijmn}^E & i, j, m, n = 1, 2, 3; p = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ e_{ip} = e_{imn} \end{cases}$$

这样方程(8.1)变为

$$\begin{cases} \sigma = C^E \epsilon - e^T E \\ D = e \epsilon + \alpha^E E \end{cases} \quad (8.2)$$

压电方程的独立变量是可以任意选择的,根据独立变量的不同选择方案,还可以有以下几种形式的压电方程^[14]:

$$\begin{cases} \sigma = C^D \epsilon - h^T D \\ E = -h \epsilon + \beta^* D \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} \epsilon = S^D \sigma + g^T D \\ E = -g \sigma + \beta^* D \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\begin{cases} \epsilon = S^E \sigma + d^T E \\ D = d \sigma + \alpha^E E \end{cases} \quad (8.5)$$

式中 C^D ——常电位移时的弹性刚度矩阵,称为开路弹性刚度矩阵;

h ——压电劲度矩阵,单位为 V/m;

β^* ——常应变时的介电隔离率矩阵,称为夹持介电隔离率矩阵,单位为 m/F;

S^D ——常电位移时的弹性柔度矩阵,称为开路柔度矩阵,单位为 m²/N;

g ——压电电压常数矩阵,单位为 V·m/N;

β^* ——常应力时的介电隔离率矩阵,称为自由介电隔离率矩阵;

S^E ——常电场时的弹性柔度常数矩阵,称为短路柔度矩阵;

d ——压电应变常数矩阵,单位为 m/V;

α^E ——常应力时的介电常数矩阵,称为自由介电常数矩阵。

上面的四类压电方程从不同角度反映了压电材料的压电性所遵从的规律,它们是相互关联的,这些联系可以在各类压电方程的系数之间的关系反映出来。下面给出这些系数之间的联系:

$$\left. \begin{aligned} S^+ C^+ &= I \quad (+ \text{代表 } E \text{ 或 } D) \\ \beta^* \alpha^* &= I \quad (* \text{代表 } \sigma \text{ 或 } \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

式中 I 是单位矩阵。

$$\left. \begin{aligned} d &= eS^E = \alpha^e g \\ e &= dC^E = \alpha^e h \\ g &= hS^D = \beta^e d \\ h &= gC^D = \beta^e e \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha^e - \alpha^e &= dc^E d^T = es^E e^T = de^T = ed^T \\ \beta^e - \beta^e &= hS^D h^T = gC^D g^T = hg^T = gh^T \\ C^D - C^E &= e^T \beta^e e = h^T \alpha^e h = h^T e = e^T h \\ S^E - S^D &= d^T \beta^e d = g^T \alpha^e g = d^T g = g^T d \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

上面的讨论是一般性的,没有涉及到各种材料的特殊性,事实上,弹性、压电、介电常数有各自的对称性,如:

$$C_{ijmn}^E = C_{jmn i}^E = C_{ijnm}^E = C_{nmij}^E, e_{nij} = e_{nji}, \alpha_{ij}^e = \alpha_{ji}^e \quad (8.9)$$

这样最一般各向异性压电介质,具有 21 个独立的弹性常数,18 个独立的压电常数和 6 个独立的介电常数。

梯度方程 小变形假设下,应变张量 ϵ_{ij} 和电场矢量可以分别由弹性位移 u_i 和电势 φ 表示:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i} \quad (8.10)$$

式中,下标逗号表示求导。

平衡方程 应力张量 σ_{ij} 和电位移矢量 D_i 服从

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0, \quad D_{i,i} = q \quad (8.11)$$

式中, f 为体力, q 为体电荷密度。

边界条件 对于压电体,边界条件包括力学和电学两种,数学表达式为

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i && \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \\ \sigma_{ij} n_j &= \bar{T}_i && \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \\ \|\varphi\| &= 0 && \text{在 } \Gamma_\varphi \text{ 上} \\ \|D_i\| n_i &= \bar{q} && \text{在 } \Gamma_q \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

式中, $\bar{n}$ 为边界外法线单位矢量, $\bar{u}, \bar{T}, \bar{q}$ 分别为在边界上给定的弹性位移、面力和面电荷; 符号 $\|F\|$ 表示变量 F 在边界或界面上的间断值。

在以后几节中, 我们主要从方程(8.1), (8.10)和(8.11)出发, 讨论求解压电材料耦合问题的基本过程。

§ 8.2 压电介质的 Stroh 方法

1958年, Stroh 在研究二维各向异性弹性介质中的裂纹和位错时提出了一种有效的复变量方法, 后来, Barnett 和 Lothe^[15], Ting 和 Hwu^[17]等人将其发展和完善, 求解了大量的弹性力学问题, 例如夹杂、界面裂纹及热弹性耦合等。1975年, Barnett 和 Lothe^[18]推广 Stroh 方法首先研究了线力和线位错作用下压电介质的弹性场和电场, 最近, 文献[1~3, 19~20]使用 Stroh 方法分析了更复杂的压电边值问题。

用位移和电势表示的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} (C_{ijkl}u_k + e_{ij}\varphi)_{,i} &= 0 \\ (e_{ik}u_k - \alpha_{ii}\varphi)_{,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

这里没有考虑体力和自由电荷, 为简单起见, 略去了材料系数的上标 E 和 ϵ 。

对于二维机电耦合问题, 假定 u_k 和 φ 仅仅是 x_1 和 x_2 的函数, 方程(8.13)的一般解可设为

$$U_k = a_k f(Z) \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (8.14)$$

式中

$$Z = x_1 + px_2, u_4 = \varphi \quad (8.15)$$

p 和 a_k 为待定常数。定义广义位移向量 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}^T$, 式(8.14)成为

$$U = af(Z) \quad (8.16)$$

将上式代入(8.13)得到

$$[Q + p(R + R^T) + p^2T]a = 0 \quad (8.17)$$

式中,上标 T 表示矩阵的转置, 4×4 矩阵 Q, R, T 是

$$Q = \begin{bmatrix} C_{ijk1} & e_{1j1} \\ e_{1k1}^T & -\alpha_{11} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} C_{ijk2} & e_{2j1} \\ e_{1k2}^T & -\alpha_{12} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} C_{2jk2} & e_{2j2} \\ e_{2k2}^T & -\alpha_{22} \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

其中, Q 和 T 为对称和非奇异矩阵。

定义广义应力向量

$$\begin{aligned} t_1 &= \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, D_1\}^T \\ t_2 &= \{\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, D_2\}^T \end{aligned} \quad (8.19)$$

则由方程(8.2)和(8.10),我们得到

$$t_1 = -\Phi_{,1}, t_2 = \Phi_{,2} \quad (8.20)$$

式中 $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\}^T$ 称为广义应力函数向量,它与 a 和 $f(Z)$ 的关系为

$$\Phi = bf(Z), b = (R^T + pT)a = -\frac{1}{p}(Q + pR)a \quad (8.21)$$

方程(8.17)为一非线性本征值问题, a 的非零解要求其系数矩阵行列式满足

$$\det[Q + p(R + R^T) + p^2T] = 0 \quad (8.22)$$

此式为 p 的 8 次多项式方程。对于稳定的压电材料,根据弹性系数张量 C_{ijk} 和介电系数张量 α_{ij} 的正定性,我们能够证明方程(8.22)存在 4 对共轭复根,记为

$$p_{\alpha+4} = \bar{p}_\alpha, \quad \text{Im}\{p_\alpha\} > 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (8.23)$$

式中,上面一横表示复数的共轭, Im 表示复数的虚部。相应于 p_α 的本征向量为

$$a_{\alpha+4} = \bar{a}_\alpha, \quad b_{\alpha+4} = \bar{b}_\alpha \quad (8.24)$$

当 $p_\alpha (\alpha=1, 2, 3, 4)$ 为互不相等的复根时,叠加得到一般解为

$$U = 2\text{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^4 a_\alpha f_\alpha(Z_\alpha)\right\}, \Phi = 2\text{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^4 b_\alpha f_\alpha(Z_\alpha)\right\} \quad (8.25)$$

式中, Re 表示复数的实部, $Z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2$ 。

在所研究的多数问题中,函数 $f_\alpha(Z_\alpha)$ ($\alpha=1, 2, 3, 4$) 有相同的函数关系,即

$$f_\alpha(Z_\alpha) = q_\alpha f(Z_\alpha) \quad (\text{对 } \alpha \text{ 不求和}) \quad (8.26)$$

引入以下矩阵和向量

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4], B = [b_1, b_2, b_3, b_4], q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$$

以及对角阵

$$\langle f(Z_\alpha) \rangle = \text{diag} \langle f(Z_1), f(Z_2), f(Z_3), f(Z_4) \rangle \quad (8.27)$$

一般解可表示为

$$\begin{aligned} u &= 2\text{Re} \{ A \langle f(Z_\alpha) \rangle q \} \\ \Phi &= 2\text{Re} \{ B \langle f(Z_\alpha) \rangle q \} \end{aligned} \quad (8.28)$$

从上面的推导可以看出,用 Stroh 方法求解压电边值问题时,我们所需要做的工作是如何根据给定问题的边界条件确定待定函数 $f_\alpha(Z_\alpha)$ 和待定常数 q_α 。

方程(8.17)的非线性本征值问题可以将其转化为标准本征值问题。使用方程(8.21)和 T 矩阵的非奇异性,我们得到

$$N\xi = p\xi \quad (8.29)$$

式中

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_1^T \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (8.30)$$

$$N_1 = -T^{-1}R, N_2 = T^{-1}, N_3 = RT^{-1}R^T - Q \quad (8.31)$$

这样确定 p 的多项式方程为

$$\det[N - pI] = 0 \quad (8.32)$$

Stroh 方法的突出特点是它能给出矩阵 A 和 B 的一些良好的数学性质,以及一些非常有用的恒等式,这里我们不加证明地给出:^[1,2]

正交关系

$$\begin{bmatrix} B^T & A^T \\ \bar{B}^T & \bar{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ B & \bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

封闭关系

$$\begin{bmatrix} A & \bar{A} \\ B & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T & A^T \\ \bar{B}^T & \bar{A}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

此式等价于

$$AB^T + \overline{AB}^T = I = BA^T + \overline{BA}^T, AA^T + \overline{AA}^T = O = BB^T + \overline{BB}^T \quad (8.35)$$

S, H 和 L 矩阵^[15]

$$S = i(2AB^T - I), H = i2AA^T, L = -i2BB^T \quad (8.36)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$, S, H, L 是实矩阵, 并且 H 和 L 是对称和非奇异的。它们满足

$$\begin{bmatrix} S & H \\ -L & S^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & H \\ -L & S^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \quad (8.37)$$

从上式我们可以看出 SH 和 LS 是反对称矩阵, 也能够证明 $H^{-1}L$ 和 SL^{-1} 是反对称矩阵。

积分公式^[16]

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_1(\omega) d\omega \\ H &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_2(\omega) d\omega \\ L &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi N_3(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1(\omega) &= -T^{-1}(\omega)R^T(\omega) \\ N_2(\omega) &= T^{-1}(\omega) \\ N_3(\omega) &= R(\omega)T^{-1}(\omega)R^T(\omega) - Q(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

$$\left. \begin{aligned} Q(\omega) &= \begin{bmatrix} C_{ijk} & e_{ij} \\ e_{ikl} & -a_{il} \end{bmatrix}_{n_i n_l} \\ R(\omega) &= \begin{bmatrix} C_{ijk} & e_{ij} \\ e_{ikl} & -a_{il} \end{bmatrix}_{n_i m_l} \\ T(\omega) &= \begin{bmatrix} C_{ijk} & e_{ij} \\ e_{ikl} & -a_{il} \end{bmatrix}_{m_i m_l} \end{aligned} \right\} \quad (8.40)$$

$$n^T = [\cos\omega, \sin\omega, 0], m^T = [-\sin\omega, \cos\omega, 0] \quad (8.41)$$

式中 ω 是从 0 到 2π 变化的实参数。

如果所研究的压电边值问题的最终结果与 H, L, S 有关, 而

不显含 A, B 和特征值 p_a , 我们可以使用上面的积分公式计算 S, H 和 L , 而无需求解本征值问题。

§ 8.3 含椭圆夹杂压电材料的机电耦合场分析

我们知道, 椭圆夹杂能够较好地模拟材料中的缺陷, 例如裂纹、孔洞和二相颗粒。因此, 这一细观模型在非压电材料的研究中被广为采用。本节我们将首先介绍应用复变量 Stroh 方法求解含椭圆夹杂压电材料耦合场的基本过程和一些主要结果^[1,2], 然后讨论夹杂退化成裂纹时的耦合场的基本特征。

§ 8.3.1 椭圆夹杂

一无限大压电基体中含有一椭圆形状的压电夹杂, 夹杂在 x_3 方向的尺寸视为无限大, 如图 8.1 所示。用参数方程表示椭圆的边界 Γ 为

$$\Gamma: \begin{cases} x_1 = a \cos \psi \\ x_2 = b \sin \psi \end{cases} \quad (8.42)$$

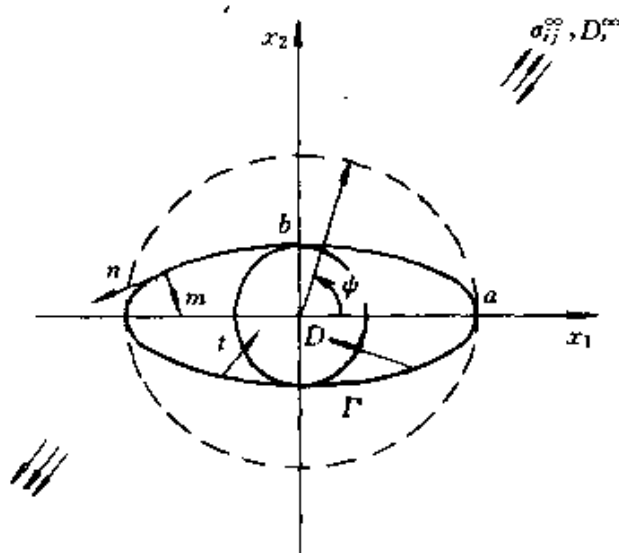


图 8.1 无限大压电基体中的椭圆压电夹杂

定义 n 和 m 分别为椭圆边界 Γ 的切向和法向单位矢量

$$n^T = [\cos\omega, \sin\omega, 0], m^T = [-\sin\omega, \cos\omega, 0] \quad (8.43)$$

式中, ω 为 n 与 x_1 轴正向之间的夹角, 它与 ψ 的关系为

$$\cos\omega = \frac{-a}{P(\psi)}\sin\psi, \quad \sin\omega = \frac{b}{P(\psi)}\cos\psi \quad (8.44)$$

这里

$$P(\psi) = \sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi} \quad (8.45)$$

基体的材料常数用 C_{ijkl}^M, e_{ij}^M 和 α_{ij}^M 表示, 夹杂的材料常数用 C_{ijkl}^I, e_{ij}^I 和 α_{ij}^I 表示。基体在无穷远处作用有广义应力 $\sigma_{ij}^\infty, D_i^\infty$ 或广义应变 $\epsilon_{ij}^\infty, E_i^\infty$, 二者间满足

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^\infty &= C_{ijkl}\epsilon_{kl}^\infty + e_{ij}E_i^\infty \\ D_i^\infty &= e_{ik}\epsilon_{kl}^\infty - \alpha_{il}E_l^\infty \end{aligned} \right\} \quad (8.46)$$

我们讨论的是平面应变和平面电场间的耦合问题, 因此, 无论给定广义应力还是广义应变都应该使

$$\epsilon_{33} = 0, E_3 = 0 \quad (8.47)$$

如果 σ_{ij}^∞ 和 D_i^∞ 已知, 我们可以通过压电方程

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij} &= S_{ijkl}^D\sigma_{kl} + g_{ij}D_i \\ E_i &= -g_{ik}\sigma_{kl} + \beta_{il}^D D_l \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

确定 ϵ_{ij}^∞ 和 E_i^∞ 。

我们下面要做的工作是确定基体和夹杂中的弹性场和电场, 它们应该满足边界条件

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\infty, D_i = D_i^\infty \quad \text{在无穷远处} \quad (8.49)$$

$$u^M = u^I, \Phi^M = \Phi^I \quad \text{在界面 } \Gamma \text{ 上} \quad (8.50)$$

和压电方程

$$\left. \begin{aligned} (C_{ijkl}u_k + e_{ij}\Phi),_{ii} &= 0 \\ (e_{ik}u_k - \alpha_{il}\Phi),_{ii} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.51)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{ijkl}^M + (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M)H(\vec{x}) \\ e_{ij} &= e_{ij}^M + (e_{ij}^I - e_{ij}^M)H(\vec{x}) \\ \alpha_{il} &= \alpha_{il}^M + (\alpha_{il}^I - \alpha_{il}^M)H(\vec{x}) \end{aligned} \right\} \quad (8.52)$$

$$H(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{在基体内} \\ 1 & \text{在夹杂内} \end{cases} \quad (8.53)$$

基体中的弹性场和电场

通过叠加原理,基体中的解可设为

$$\begin{aligned} U^M &= U^\infty + 2\operatorname{Re}\{A\langle F(Z) \rangle A^T\}g + 2\operatorname{Re}\{A\langle F(Z) \rangle B^T\}h \\ \Phi^M &= \Phi^\infty + 2\operatorname{Re}\{B\langle F(Z) \rangle A^T\}g + 2\operatorname{Re}\{B\langle F(Z) \rangle B^T\}h \end{aligned} \quad (8.54)$$

式中, U^∞, Φ^∞ 相应于基体中无夹杂时在 $\sigma_{ij}^\infty, D_i^\infty$ 作用下的均匀场, 右端的第二部分为夹杂存在时所产生的扰动场, 均匀场 U^∞, Φ^∞ 为

$$U^\infty = x_1 \epsilon_1^\infty + x_2 \epsilon_2^\infty, \Phi^\infty = x_1 t_1^\infty - x_2 t_2^\infty \quad (8.55)$$

$$\epsilon_1^\infty = u_{,1}^\infty = \{\epsilon_{11}^\infty, 0, 2\epsilon_{13}^\infty, -E_1^\infty\}^T, \epsilon_2^\infty = u_{,2}^\infty = \{2\epsilon_{21}^\infty, \epsilon_{22}^\infty, 2\epsilon_{23}^\infty, -E_2^\infty\}^T \quad (8.56)$$

$$t_1^\infty = [\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{13}^\infty, D_1^\infty]^T, t_2^\infty = [\sigma_{21}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{23}^\infty, D_2^\infty]^T \quad (8.57)$$

根据文献[21], 扰动部分中的待定函数可取为

$$\langle F(Z) \rangle = \operatorname{diag}[\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \xi_3^{-1}, \xi_4^{-1}] \quad (8.58)$$

式中

$$\xi_a = \frac{Z_a + \sqrt{Z_a^2 - (a^2 + p_a^2 b^2)}}{a - ip_a b}, \quad \xi_a^{-1} = \frac{Z_a - \sqrt{Z_a^2 - (a^2 + p_a^2 b^2)}}{a + ip_a b} \quad (8.59)$$

在椭圆边界 Γ 上

$$\xi_a^{-1} = \cos\psi - i\sin\psi, \langle F(Z) \rangle = (\cos\psi - i\sin\psi)\operatorname{diag}[1, 1, 1, 1] \quad (8.60)$$

夹杂内部的弹性场和电场

按照文献[5]所得到的结论: 在均匀外场作用下, 椭圆夹杂内部的弹性场和电场也是均匀的, 所以其解可设为

$$u^I = x_1 \epsilon_1^I + x_2 \epsilon_2^I, \quad \Phi^I = x_1 t_1^I - x_2 t_2^I \quad (8.61)$$

式中

$$\begin{aligned} \epsilon_1^I &= u_{,1}^I = [\epsilon_{11}^I, \Omega, 2\epsilon_{13}^I, -E_1^I]^T \\ \epsilon_2^I &= u_{,2}^I = [2\epsilon_{21}^I - \Omega, \epsilon_{22}^I, 2\epsilon_{23}^I, -E_2^I]^T \end{aligned} \quad (8.62)$$

$$t_1^I = -\Phi_{,1}^I = [\sigma_{11}^I, \sigma_{12}^I, \sigma_{13}^I, D_1^I]^T, t_2^I = \Phi_{,2}^I = [\sigma_{21}^I, \sigma_{22}^I, \sigma_{23}^I, D_2^I]^T \quad (8.63)$$

方程(8.62)中的 Ω 表示夹杂的刚体转动, σ_{ij}^I, D_i^I 和 ϵ_{ij}^I, E_i^I 之间满足

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^I &= C_{ijkl}^I \epsilon_{kl}^I + e_{lij}^I E_l^I \\ D_i^I &= e_{ikl}^I \epsilon_{kl}^I - \alpha_{ii}^I E_i^I \end{aligned} \right\} \quad (8.64)$$

从上面的分析中可以看出, 基体和夹杂中的解已经满足条件(8.49)和方程(8.51), 所研究的问题转化为利用界面条件(8.50)确定 $g, h, t_1^I, t_2^I, \epsilon_1^I, \epsilon_2^I$ 。

在椭圆边界 Γ 上

$$\left. \begin{aligned} u^I &= a \cos \psi \epsilon_1^I + b \sin \psi \epsilon_2^I \\ \Phi^I &= a \cos \psi t_1^I - b \sin \psi t_2^I \\ u^M &= a \cos \psi \epsilon_1^\infty + b \sin \psi \epsilon_2^\infty + h \cos \psi - (S^M h + H^M g) \sin \psi \\ \Phi^M &= a \cos \psi t_1^\infty - b \sin \psi t_2^\infty + g \cos \psi + (L^M h + (S^T)^M g) \sin \psi \end{aligned} \right\} \quad (8.65)$$

这里我们已经使用了公式(8.60)和恒等式(8.36)。

将(8.65)和(8.66)代入界面条件(8.50), 比较系数得到

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} \epsilon_1^I \\ t_2^I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon_1^\infty \\ t_2^\infty \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S^M & H^M \\ -L^M & (S^T)^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ g \end{bmatrix} &= b \begin{bmatrix} \epsilon_2^\infty \\ -t_1^\infty \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \epsilon_2^I \\ t_2^I \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (8.67)$$

从上面的方程, 还不能解出 $g, h, t_1^I, t_2^I, \epsilon_1^I, \epsilon_2^I$ 。为此, 利用关系式(见(8.29))

$$N \begin{bmatrix} u_{,1} \\ \Phi_{,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,2} \\ \Phi_{,2} \end{bmatrix} \quad (8.68)$$

增加补充方程

$$N^M \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1^\infty \\ t_2^\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2^\infty \\ -t_1^\infty \end{bmatrix}, \quad N^I \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_1^I \\ t_2^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2^I \\ -t_1^I \end{bmatrix} \quad (8.69)$$

式中 N^I 为与夹杂材料常数有关的矩阵, 形式与(8.30)和(8.31)中的相同。

通过方程(8.67), (8.68)和(8.69), 解出 g, h 为

$$\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = D^{-1}(N^M - N^I) \begin{bmatrix} \epsilon_1^\infty \\ t_2^\infty \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

式中

$$D = \begin{bmatrix} S^M & H^M \\ -L^M & (S^T)^M \end{bmatrix} + \frac{b}{a} N^I \quad (8.71)$$

文献[1,2]证明了 D^{-1} 是存在的, 解出 g, h 后, 回代到(8.67)和(8.68), 就可以得到 $\epsilon_1^I, t_1^I, \epsilon_2^I, t_2^I$ 。夹杂的刚体转动易于从(8.67)中解出:

$$\Omega = \frac{(h_1)_2}{a} \quad (8.72)$$

至此, 我们解析地得到了基体和夹杂中的弹性场和电场。

为了研究夹杂存在时所引起的应力和电场集中问题, 下面我们推导沿椭圆边界广义应力的解析公式。

我们用 t_m 表示垂直于 m 面上的广义应力矢量, 用 t_n 表示垂直于 n 面上的广义应力矢量, 如图 8.2 所示。

让 n 表示 $\vec{n}$ 方向的曲线坐标, 则 t_m 为

$$\tilde{t}_m = [(t_m)_1, (t_m)_2, (t_m)_3, D_m]^T = \Phi_{,n} \quad (8.73)$$

式中

$$\Phi_{,n} = \frac{\partial \Phi / \Gamma}{\rho(\psi) \partial \psi} \quad (8.74)$$

将方程(8.66)代入(8.73), 并利用(8.74), 得到 $\tilde{t}_m$ 为

$$\tilde{t}_m = -\frac{1}{\rho(\psi)} [a \sin \psi t_2^\infty + b \cos \psi t_1^\infty + g \cos \psi + (S^T g - Lh) \sin \psi] \quad (8.75)$$

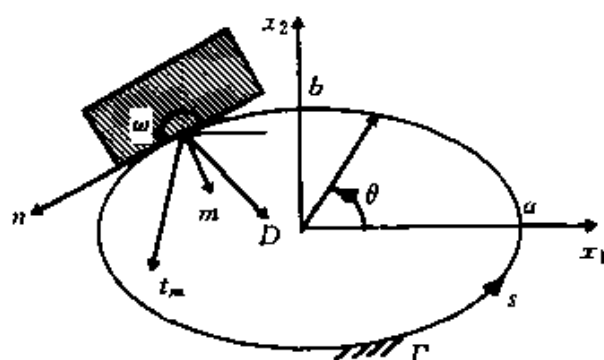
用 m 表示 $\vec{m}$ 方向的曲线坐标, t_n 为

$$\tilde{t}_n = [(t_n)_1, (t_n)_2, (t_n)_3, -D_n]^T = \Phi_{,m} \quad (8.76)$$

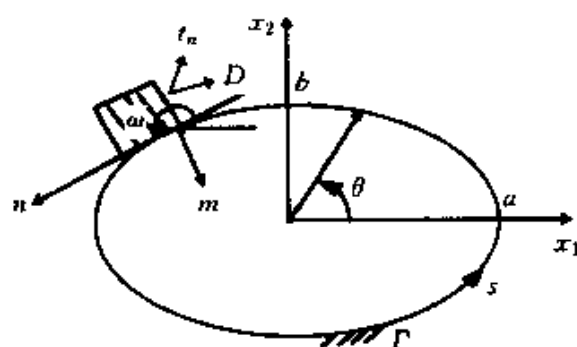
式中, $-D_n = \vec{D} \cdot (-\vec{n})$, 将(8.66)第二式代入上式, t_n 为

$$\tilde{t}_n = [a \cos \psi t_1^\infty - b \sin \psi t_2^\infty]_{,m} + [g \cos \psi + (Lh - S^T g) \sin \psi]_{,m} \quad (8.77)$$

按照文献[2]的推导



(a) 广义应力 $\tilde{t}_m$ 示意图



(b) 广义应力 $\tilde{t}_n$ 示意图

图 8.2 沿界面的广义应力矢量

$$\begin{aligned}
 & [a \cos \psi t_1^\infty - b \sin \psi t_2^\infty]_{,m} \\
 &= -\frac{1}{\rho(\psi)} [b \cos \psi t_2^\infty - a \sin \psi t_1^\infty] [g \cos \psi + (Lh - S^T g) \sin \psi]_{,m} \\
 &= -\frac{1}{\rho(\psi)} \{ N_3(\omega) [h \sin \psi + (Sh + Hg) \cos \psi] + N_1^T(\omega) \\
 &\quad \cdot [g \sin \psi + (-Lh + S^T g) \cos \psi] \}
 \end{aligned}$$

最后, $\tilde{t}_n$ 为

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}_n &= -\frac{1}{\rho(\psi)} [b \cos \psi t_2^\infty - a \sin \psi t_1^\infty] \\
 &\quad -\frac{1}{\rho(\psi)} \{ N_3(\omega) [h \sin \psi + (Sh + Hg) \cos \psi] \\
 &\quad + N_1^T(\omega) [g \sin \psi + (-Lh + S^T g) \cos \psi] \} \quad (8.78)
 \end{aligned}$$

应用上面的推导的公式计算含孔压电材料的应力和电场集中时,与弹性材料的孔边应力集中问题是有区别的。对弹性材料,孔内部的应力为零,即在孔的边界上可以给定面力为零的边界条件。然而,对于压电材料,由于孔内部的电场不为零,因此,除了力学边界条件可以像弹性材料那样给定外,电学边界条件应为真空材料的界面连续性条件。Pak^[22,23]在研究含裂纹或圆形夹杂压电材料的反平面问题时,根据多数压电材料的介电常数比真空的介电常数大3到4个数量级这一事实,提出了一种近似的电学边界条件,即边界法线方向上的电位移为零,数学表达式为

$$D_n = 0 \quad (8.79)$$

他从数学公式出发论证了(8.79)的合理性,后来,这一近似的电学边界条件在含孔洞或裂纹压电材料耦合场的研究中得到了广泛的应用^[3,20,24~27]。

§ 8.3.2 裂 纹

设想一无限压电介质中存在一个 Griffith 裂纹,如图 8.3 所示,裂纹面上的力和电位移为零,即

$$t_2 = [\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, D_2]^T = 0 \quad (8.80)$$

该问题的解可由 § 8.3.1 得到的一般椭圆夹杂的解,通过让 $b \rightarrow 0$ 而得到:

$$\left. \begin{aligned} U &= x_1 \epsilon_1^\infty + x_2 \epsilon_2^\infty + 2\operatorname{Re}\{A \langle F(Z) \rangle A^T\}g + 2\operatorname{Re}\{A \langle F(Z) \rangle B^T\}h \\ \Phi &= x_1 \epsilon_2^\infty - x_2 \epsilon_1^\infty + 2\operatorname{Re}\{B \langle F(Z) \rangle A^T\}g + 2\operatorname{Re}\{B \langle F(Z) \rangle B^T\}h \end{aligned} \right\} \quad (8.81)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \langle F(Z) \rangle &= \operatorname{diag}(\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}, \xi_3^{-1}, \xi_4^{-1}) \\ \xi_a^{-1} &= (Z_a^2 - \sqrt{Z_a^2 - a^2})/a \end{aligned} \right\} \quad (8.82)$$

$$\left. \begin{aligned} g &= -at_2^\infty \\ h &= L^{-1}S^T g \end{aligned} \right\} \quad (8.83)$$

我们所关心的是裂纹尖端附近的弹性场和电场,现在计算裂

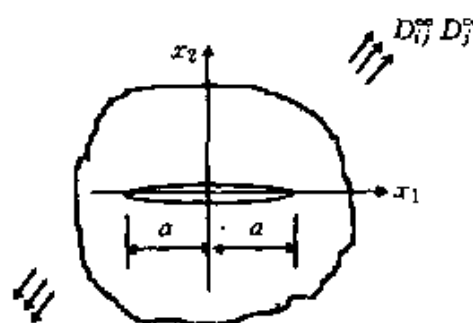


图 8.3 Griffith 裂纹

纹右尖端 $x_1 > a$ 处的广义应力矢量, 对 Φ 关于 x_1 求导数后, 令 $x_2 \rightarrow 0$, 我们得到

$$t_2 = t_2^\infty + \left(1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}\right) \{BA^T g + BB^T h\} \quad (8.84)$$

使用(8.36)和(8.83), t_2 简化为

$$t_2 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}} t_2^\infty \quad (8.85)$$

上式表明裂纹尖端的应力场和电位移场存在 $1/2$ 的奇异性, Suo^[3], Pak^[27] 和 Sosa^[25] 也得到了同样的结论。

裂纹尖端奇异场的幅度可用应力和电位移强度因子来表征, 类似于弹性材料的定义, 它们是

$$\begin{aligned} K &= [K_I, K_1, K_{II}, K_D]^T \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow a} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} t_2 \\ &= \sqrt{\pi a} t_2 \end{aligned} \quad (8.86)$$

此式并没有反映出电弹之间的耦合效应, 因此, 用强度因子作断裂判据对于压电材料是否合适尚存质疑。Suo^[3] 在研究压电材料的界面裂纹时, 导出了压电材料的能量释放率公式, 它与强度因子的关系为

$$G = \frac{1}{2} K L^{-1} K^T \quad (8.87)$$

这一结果也被 Pak^[27] 所导出。

§ 8.4 含椭球形夹杂压电材料的弹性场和电场

在本章 § 8.2 和 § 8.3 两节中, 我们简单介绍了求解压电材料二维耦合问题的 Stroh 方法, 这种方法最突出的特点是给出物理

量的显函形式的封闭解。对于三维夹杂问题,加之材料的耦合特性和各向异性,求解工作将更加困难。Wang^[5,31]借助于 Green 函数方法和 Fourier 变换技术最先发表了含椭球体夹杂压电材料的弹性场和电场,稍后 Benvensite^[6],Chen^[7],Dunn^[8]等人也独立地研究了与椭球体夹杂相关的一些问题。这里按照[5]的基本思想予以介绍。

基体和夹杂中的弹性场和电场

设想一个无限大压电基体中,含有一个椭球形夹杂 Ω^+ ,如图 8.4 所示。基体中的弹性系数张量、压电系数张量和介电系数张量用 $C_{ijkl}^M, e_{ij}^M, \alpha_{ij}^M$ 表示,而夹杂的各材料系数张量用 C_{ijkl}^I, e_{ij}^I 和 α_{ij}^I 表示,基体在无穷远处受到均匀应力场 σ_{ij}^0 和电位移场 D_i^0 的作用,假定夹杂与基体是完好粘接的,这样夹杂问题归结为解下面边值问题

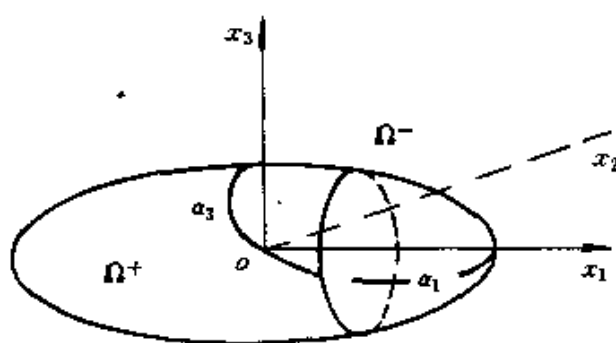


图 8.4 椭球体夹杂

平衡方程

$$\left. \begin{aligned} [C_{ijkl}(\vec{x})u_k + e_{ij}(\vec{x})\varphi]_{,i} &= 0 \\ [e_{ikl}(\vec{x})u_k - \alpha_{il}(\vec{x})\varphi]_{,i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.88)$$

边界条件

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &\rightarrow \sigma_{ij}^0 \\ D_i &\rightarrow D_i^0 \end{aligned} \right\} \quad \text{在无穷远处} \quad (8.89)$$

界面连续性条件

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{ij}^M - \sigma_{ij}^I) n_i &= 0 \\ (D_i^M - D_i^I) n_i &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{E}^M - \vec{E}^I) &= 0, \text{ 或 } \varphi^M = \varphi^I \\ U_i^M &= U_i^I \end{aligned} \right\} \quad (8.91)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl}(\vec{x}) &= C_{ijkl}^M + \Delta C_{ijkl} H(\vec{x}) \\ e_{lij}(\vec{x}) &= e_{lij}^M + \Delta e_{lij} H(\vec{x}) \\ a_{ij}(\vec{x}) &= a_{ij}^M + \Delta a_{ij} H(\vec{x}) \end{aligned} \right\} \quad (8.92)$$

而且

$$\left. \begin{aligned} \Delta C_{ijkl} &= C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M \\ \Delta e_{lij} &= e_{lij}^I - e_{lij}^M \\ \Delta a_{ij} &= a_{ij}^I - a_{ij}^M \end{aligned} \right\} \quad (8.93)$$

$$H(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \vec{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \vec{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (8.94)$$

将(8.92)代入(8.88),平衡方程化为

$$\left. \begin{aligned} (C_{ijkl}^M u_{k,l} + e_{lij}^M \varphi_{,l})_{,i} &= - [\Delta C_{ijkl} u_{k,l} H(\vec{x}) + \Delta e_{lij} \varphi_{,l} H(\vec{x})]_{,i} \\ (e_{jkl}^M u_{k,l} - a_{il}^M \varphi_{,l})_{,i} &= - [\Delta e_{jkl} u_{k,l} H(\vec{x}) - \Delta a_{il} \varphi_{,l} H(\vec{x})]_{,i} \end{aligned} \right\} \quad (8.95)$$

引入 Green 函数 G^1, G^2, F^1, F^2 如下:

$$\begin{bmatrix} C_{ijkl}^M & e_{lij}^M \\ e_{ikl}^M & -a_{il}^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{kp,li}^1 & G_{k,li}^2 \\ F_{p,li}^1 & F_{,li}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_{jp} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (8.96)$$

则方程(8.95)的解可用积分方程表示为

$$\left. \begin{aligned} u_m &= u_m^0 + \int_{\Omega^+} G_{mj,i}^1(\vec{x} - \vec{x}') (\Delta C_{ijkl} u_{k,l} + \Delta e_{li} \Phi_{,l}) d\vec{x}' \\ &\quad + \int_{\Omega^+} G_{mj,i}^2(\vec{x} - \vec{x}') (\Delta e_{ikl} u_{k,l} - \Delta \alpha_{il} \varphi_{,l}) d\vec{x}' \\ \Phi &= \Phi^0 + \int_{\Omega^+} F_{j,i}^1(\vec{x} - \vec{x}') (\Delta C_{ijkl} u_{k,l} + \Delta e_{li} \varphi_{,l}) d\vec{x}' \\ &\quad + \int_{\Omega^+} F_{j,i}^2(\vec{x} - \vec{x}') (\Delta e_{ikl} u_{k,l} - \Delta \alpha_{il} \varphi_{,l}) d\vec{x}' \end{aligned} \right\} \quad (8.97)$$

式中 u_m^0, Φ^0 相应于远场的均匀解, 即方程(8.95)的齐次解, 推导过程中使用了广义函数 $H(\vec{x})$ 的性质和关系式

$$G_{mj,i'}(\vec{x} - \vec{x}') = -G_{mj,i}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (8.98)$$

一般说来, 很难从方程(8.96)中得到 Green 函数 G^1, G^2, F^1, F^2 的解析形式, 这里使用 Fourier 变换技术将 Green 函数表示成积分形式。由 Fourier 变换定义 Green 函数为

$$\left. \begin{aligned} G_{kp}^1(\vec{x} - \vec{x}') &= \frac{1}{8\pi^3} \int \bar{G}_{kp}^1(\vec{\xi}) \exp[i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{\xi} \\ G_k^2(\vec{x} - \vec{x}') &= \frac{1}{8\pi^3} \int \bar{G}_k^2(\vec{\xi}) \exp[i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{\xi} \\ F_p^1(\vec{x} - \vec{x}') &= \frac{1}{8\pi^3} \int \bar{F}_p^1(\vec{\xi}) \exp[i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{\xi} \\ F^2(\vec{x} - \vec{x}') &= \frac{1}{8\pi^3} \int \bar{F}^2(\vec{\xi}) \exp[i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{\xi} \end{aligned} \right\} \quad (8.99)$$

式中, $\bar{G}^1, \bar{G}^2, \bar{F}^1, \bar{F}^2$ 由下式确定

$$\begin{bmatrix} C_{ijkl}^M \xi_i \xi_l & e_{lij}^M \xi_i \xi_l \\ e_{ikl}^M \xi_i \xi_l & -\alpha_{il}^M \xi_i \xi_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}_{kp}^1 & \bar{G}_k^2 \\ \bar{F}_p^1 & \bar{F}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{jp} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.100)$$

从(8.91)发现

$$\bar{G}_k^2(\vec{\xi}) = F_k(\vec{\xi}) \quad (8.101)$$

有了位移 u_m 和电势 Φ , 通过梯度方程(8.10)可以得到应变场和电场为

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^0 - \frac{1}{16\pi^3} \int_{\Omega} d\vec{x}' (\bar{G}_{\alpha j}^1 \xi_j \xi_{\beta} + \bar{G}_{\beta j}^1 \xi_j \xi_{\alpha}) (\Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta e_{ij}E_l)\exp[i\vec{\xi}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')]d\vec{\xi}-\frac{1}{16\pi^3}\int_n d\vec{x}'\int(\bar{G}_\alpha^2\xi_i\xi_\beta \\
& +\bar{G}_\beta^2\xi_i\xi_\alpha)(\Delta e_{ik}\epsilon_k+\Delta a_lE_l)\exp[i\vec{\xi}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')]d\vec{\xi} \\
E_\alpha=E_\alpha^0-\frac{1}{8\pi^3}\int_n d\vec{x}'\int\bar{F}_j^1\xi_i\xi_\alpha(\Delta C_{ijk}\epsilon_k-\Delta e_{ij}E_l)\exp[i\vec{\xi} \\
& \cdot(\vec{x}-\vec{x}')]d\vec{\xi}-\frac{1}{8\pi^3}\int_n d\vec{x}'\int\bar{F}^2\xi_i\xi_\alpha(\Delta e_{ik}\epsilon_k \\
& +\Delta a_lE_l)\exp[i\vec{\xi}(\vec{x}-\vec{x}')]d\vec{\xi}
\end{aligned} \quad (8.102)$$

推导过程中使用了

$$f_{,ij}(\vec{x}-\vec{x}')=-\frac{1}{8\pi^3}\int\bar{f}(\vec{\xi})\xi_i\xi_j\exp[i\vec{\xi}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')]d\vec{\xi} \quad (8.103)$$

方程(8.102)中涉及到的积分是非常复杂的,如果夹杂为椭球体,仿照 Mura^[28]的推导过程,积分公式可以简化为一个单位球面上的积分,具体步骤如下:

考虑积分

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta} &= \int_n d\vec{x}' \int G_{\alpha j}^1 \xi_i \xi_\beta (\Delta C_{ijk} \epsilon_k - \Delta e_{ij} E_l) \exp[i\vec{\xi} \\
& \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\vec{\xi}
\end{aligned} \quad (8.104)$$

第一步,化简关于变换空间 $\vec{\xi}$ 的积分.

引入变量替换

$$\vec{W} = \vec{\xi}/\xi, \quad \xi = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2} \quad (8.105)$$

这样 $\vec{\xi}$ 空间的体元 $d\vec{\xi}$ 为

$$d\vec{\xi} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \xi^2 d\xi dS(\vec{W}) \quad (8.106)$$

式中 $dS(\vec{W})$ 代表 $\vec{\xi}$ 空间中单位 S^2 的面元,将(8.105)和(8.106)代入(8.104)得到

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta} &= \int_n d\vec{x}' \int_0^\infty \xi^2 d\xi \int_{S^2} \bar{G}_{\alpha j}^1 W_i W_\beta (\Delta C_{ijk} \epsilon_k - \Delta e_{ij} E_l) \\
& \cdot \exp[i\vec{\xi} \vec{W} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] dS(\vec{W}) \\
&= \frac{1}{2} \int_n d\vec{x}' (\Delta C_{ijk} \epsilon_k - \Delta e_{ij} E_l) \int_{S^2} \xi^2 \bar{G}_{\alpha j}^1 W_i W_\beta dS(\vec{W})
\end{aligned}$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \exp[i\xi \vec{W} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] d\xi$$

利用

$$\xi^2 \bar{G}_{aj}^1 = \bar{G}_{aj}^1(\vec{W}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\xi \eta) d\xi = 2\pi \delta(\eta) \quad (8.107)$$

上式化为

$$I_{\alpha\beta} = -\pi \int_0^1 dx' \int_{S^2} \xi^2 \bar{G}_{aj}^1 W_i W_\beta \delta''[\vec{W} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] \cdot (\Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \Delta e_{ij} E_l) dS(\vec{W}) \quad (8.108)$$

第二步化简物理空间中关于 $\vec{x}'$ 的积分。

假定各向异性压电材料材料主轴与椭球体夹杂的主轴一致, 椭球 Ω^+ 的方程为

$$(x'_1)^2/a_1^2 + (x'_2)^2/a_2^2 + (x'_3)^2/a_3^2 = 1 \quad (8.109)$$

引入坐标变换

$$\begin{aligned} x_i/a_i &= y_i, x'_i/a_i = y'_i, \quad \rho_i = a_i W_i, W'_i = a_i W_i/\rho \\ \rho &= (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (8.110)$$

则体元 $d\vec{x}'$ 为

$$d\vec{x}' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 = a_1 a_2 a_3 dy'_1 dy'_2 dy'_3 = a_1 a_2 a_3 r dr dZ d\theta \quad (8.111)$$

由(8.110)和(8.111), $I_{\alpha\beta}$ 为

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} &= -\pi a_1 a_2 a_3 \int_{-1}^1 dZ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr \int_{S^2} \bar{G}_{aj}^1(\vec{W}) W_i W_\beta \delta''[\rho W'_m y_m \\ &\quad - \rho Z] (\Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl} - \Delta e_{ij} E_l) dS(\vec{W}) \end{aligned} \quad (8.112)$$

当场点 $\vec{x}$ 位于 Ω^+ 内时, 即 $\vec{y}$ 在单位球内时, 关于 Z 做分部积分, $I_{\alpha\beta}$ 成为

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} &= -\pi a_1 a_2 a_3 \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^R r dr \frac{\partial^2}{\partial Z^2} (\Delta C_{ijkl} E_{kl}^I - \Delta e_{ij} E_l^I) \right. \\ &\quad - Z \left\{ \frac{\partial}{\partial Z} (\Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij} E_l^I) \right\}_{r=R} - Z \frac{\partial}{\partial Z} \{ \Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}^I \\ &\quad - \Delta e_{ij} E_l^I \}_{r=R} - \{ \Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij} E_l^I \}_{r=R} \Big|_{Z=W'_m y_m} \\ &\quad \times \int_{S^2} \bar{G}_{aj}^1 W_i W_\beta \rho^{-3} dS(\vec{W}) \end{aligned} \quad (8.113)$$

式中,上标 I 是指夹杂内部点的物理量,如果在夹杂内部的弹性场和电场是均匀的,则上式成为

$$I_{\alpha\beta} = 2\pi^2(\Delta C_{ijkl}\epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij}^I E_i^I) \int_{S^2} \bar{G}_{\alpha j}^1 W_i W_\beta dS(W'_i) \quad (8.114)$$

式中

$$dS(W'_i) = a_1 a_2 a_3 \rho^{-3} dS(\vec{W})$$

第三步化简关于球面 $dS(W'_i)$ 的积分。

利用

$$W_1 = W'_1/a_1, \quad W_2 = W'_2/a_2, \quad W_3 = W'_3/a_3 \quad (8.115)$$

$$W'_1 = (1 - W_3'^2)^{1/2} \cos\theta, \quad W'_2 = (1 - W_3'^2)^{1/2} \sin\theta, \quad W'_3 = W'_3 \quad (8.116)$$

$I_{\alpha\beta}$ 成为

$$I_{\alpha\beta} = 2\pi^2(\Delta C_{ijkl}\epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij}^I E_i^I) \int_{-1}^1 dW'_3 \int_0^{2\pi} W_i W_\beta \bar{G}_{\alpha j}^1 d\theta \quad (8.117)$$

方程(8.93)中的其它积分可以用类似的方式进行化简。

读者应该注意的是在第二步中,我们使用了 $\epsilon_{\alpha\beta}^I$ 和 E_α^I 是常数这一条件,它可以从下面的结论中得到:如果基体中的夹杂承受均匀场 $\epsilon_{\alpha\beta}^0$ 和 E_α^0 ,则夹杂内部的弹性场和电场是均匀的,这一结论来源于(8.93)的解的唯一性。

将简化后的积分公式代入到方程(8.93),得到夹杂内部的应变场和电场为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}^I &= \epsilon_{\alpha\beta}^0 - \frac{1}{8\pi} (N_{\beta\alpha j}^1 + N_{\alpha\beta j}^1) (\Delta C_{ijkl}\epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij}^I E_i^I) \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} (N_{\alpha\beta i}^2 + N_{\beta\alpha i}^2) (\Delta e_{ik}^I \epsilon_{kl}^I + \Delta \alpha_{il} E_l^I) \\ E_\alpha^I &= E_\alpha^0 + \frac{1}{4\pi} N_{\beta\alpha}^2 (\Delta C_{ijkl}\epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij}^I E_i^I) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} N_{\alpha i}^3 (\Delta e_{ik}^I \epsilon_{kl}^I + \Delta \alpha_{il} E_l^I) \end{aligned} \right\} \quad (8.118)$$

此式为关于 $\epsilon_{\alpha\beta}^I$ 和 E_α^I 的线性代数方程,求解便得到 $\epsilon_{\alpha\beta}^I$ 和 E_α^I , 式中

$$\left. \begin{aligned} N_{ijk}^1 &= \int_{-1}^1 dW'_3 \int_0^{2\pi} \bar{G}_{ij}^1(\vec{W}) W_k W_l d\theta \\ N_{ijk}^2 &= \int_{-1}^1 dW'_1 \int_0^{2\pi} \bar{G}_i^2(\vec{W}) W_j W_k d\theta \\ N_{ij}^3 &= \int_{-1}^1 dW'_1 \int_0^{2\pi} \bar{F}^2(\vec{W}) W_i W_j d\theta \end{aligned} \right\} \quad (8.119)$$

若基体是横观各向同性压电材料(本构方程见附录 A),而且 x_3 方向为极化方向, N^1, N^2, N^3 张量中的非零分量在附录 II 中给出。用同样的分析过程也可以得到基体中的弹性场和电场。

界面上的弹性场和电场可由如下推导求得。

定义应变和电场的间断值为

$$\left. \begin{aligned} [\epsilon_{ij}] &= \epsilon_{ij}^M - \epsilon_{ij}^I = \Delta_i n_j \\ [E] &= E_i^M - E_i^I = \lambda n_i \end{aligned} \right\} \quad (8.120)$$

应用压电方程(8.1)和界面连续性条件(8.90),我们得到

$$\left. \begin{aligned} n_i \{ (C_{ijkl}^M [\epsilon_M] - e_{ij}^M [E_I]) - (\Delta C_{ijl} \epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij} E_l^I) \} &= 0 \\ n_i \{ (e_{ikl}^M [\epsilon_M] + \alpha_{il}^M [E_I]) - (\Delta e_{ikl} \epsilon_{kl}^I + \Delta \alpha_{il} E_l^I) \} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.121)$$

把(8.120)代入上式,有

$$\left. \begin{aligned} n_i C_{ijkl}^M \Delta_k n_l - n_i e_{ij}^M n_l \lambda &= n_i (\Delta C_{ijl} \epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij} E_l^I) \\ n_i e_{ikl}^M \Delta_k n_l + n_i \alpha_{il}^M n_l \lambda &= n_i (\Delta e_{ikl} \epsilon_{kl}^I + \Delta \alpha_{il} E_l^I) \end{aligned} \right\} \quad (8.122)$$

解上述方程组得到

$$\left. \begin{aligned} \Delta_a &= \bar{G}_{aj}^1(\vec{n}) [n_i (\Delta C_{ijl} \epsilon_{kl}^I - \Delta e_{ij} E_l^I)] \\ &\quad + \bar{G}_a^2(\vec{n}) [n_i \Delta e_{ikl} \epsilon_{kl}^I + n_i \Delta \alpha_{il} E_l^I] \\ \lambda &= -\bar{G}_j^2(\vec{n}) [n_i \Delta C_{ijl} \epsilon_{kl}^I - n_i \Delta e_{ij} E_l^I] \\ &\quad - \bar{F}(\vec{n}) [n_i \Delta e_{ikl} \epsilon_{kl}^I + n_i \Delta \alpha_{il} E_l^I] \end{aligned} \right\} \quad (8.123)$$

这样,就得到了基体在界面上的弹性场和电场,进一步我们就可以计算界面上基体中的应力和电场集中问题。

§ 8.5 压电复合材料的有效性能预报

压电复合材料的出现、应用和发展始于80年代初期,它是将压电陶瓷和聚合物按一定的组分比例和空间几何分布复合而成,能够成倍提高材料的某些压电性能。并具有压电陶瓷所没有的优良性能。例如,压电陶瓷虽有较高的压电应变系数,但其压电电压系数较低,不能满足超声测量等许多工程应用的要求,利用复合材料技术就可以克服压电陶瓷的上述缺点。

对于压电复合材料,按压电相的几何形状,Newnham^[29]等人提出了连通性的概念,图8.5给出了压电复合材料的几种连通性,通常以第一个数字代表压电相的连通维数,第二个数字代表聚合物的连通维数。

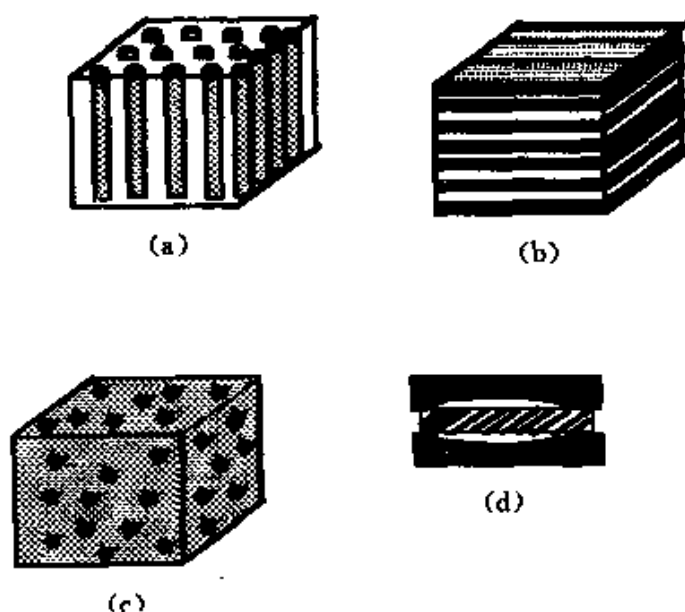


图 8.5 压电复合材料几种连通性示意图

- (a)埋在连续基体中的杆状压电陶瓷复合材料具有1-3连通性;
- (b)多层陶瓷电容和驱动器压电复合材料的2-2连通性;
- (c)热敏电阻和化学传感器的压电复合材料具有0-3连通性;
- (d)Moonie 复合材料具有2-2连通性。

用传统复合材料的细观力学方法研究压电复合材料的有效性能是近几年才出现的,主要目的是建立材料的宏观有效性能,包括弹性、压电和介电性能,与细观结构的定量关系,以指导材料的设计和制造。由于压电材料多数为各向异性体,所以求得有效电弹常数比求得结构复合材料的等效模量复杂得多,但思想和方法还是一致的。Schulgasser^[12]发现对于横观各向同性压电材料的10个材料常数之间有6个约束方程,所以只要求得其中4个有效常数,就可以得到其它6个。Benveniste 和 Dvorak^[35]则用类似于 Hashin^[36]的均匀场和均匀边界条件的概念得到了等效常数的关系式,Dunn 和 Taya^[13]用第二章介绍的最常用的细观力学方法,即 Dilute 模型,自洽方法,Mori-Tanaka 模型和微分方法,建立了压电复合材料有效常数的求解公式,并给出了数值计算结果。这里需要指出的是 Dunn 和 Taya 的公式是隐式的,公式中涉及到的积分是二维面积分,需借助于数值技术求解,用起来不太方便。Wang 和 Du^[9,10]给出了用 Dilute 和 Mori-Tanaka 方法预报有效性能的解析公式,并将公式中所涉及到的积分化为最简形式,结果便于工程应用。

本节我们先向读者介绍具有解析性质的 Dilute 和 Mori-Tanaka 方法,而后给出文献[9,10,13]所得到的一些数值结果。

§ 8.5.1 预报有效电弹性能的 Dilute 方法和 Mori-Tanaka 方法

考虑由两相压电介质组成的复合材料,每一相都服从本构方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{(r)} &= C^{(r)} \epsilon^{(r)} - e^{(r)T} E^{(r)} \\ D^{(r)} &= e^{(r)} \epsilon^{(r)} + \alpha^{(r)} E^{(r)} \end{aligned} \right\} \quad (8.124)$$

式中 $r=M, I$; M 表示基体, I 表示夹杂。

设想两相压电复合材料承受均匀边界条件 ϵ_{ij}^0, E_i^0 或

$$u_i^0 = \epsilon_{ij}^0 x_j, \varphi^0 = -E_i^0 x_i \quad (8.125)$$

Benveniste 和 Dvorak 证明了

$$\langle \epsilon_{ij} \rangle = \epsilon_{ij}^0, \quad \langle E_i \rangle = E_i^0 \quad (8.126)$$

式中,角括号 $\langle \rangle$ 表示体积平均。

定义

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= C^* \langle \epsilon^0 \rangle - e^{*T} \langle E^0 \rangle \\ \langle D \rangle &= e^* \langle \epsilon^0 \rangle + \alpha^* \langle E^0 \rangle \end{aligned} \right\} \quad (8.127)$$

式中 C^*, e^*, α^* 称为压电复合材料的有效材料常数。另一方面

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{V} \int_V \sigma dV = \frac{1}{V} \left[\int_{V_M} \sigma dV + \int_{V_I} \sigma dv \right] \\ \langle D \rangle &= \frac{1}{V} \int_V D dv = \frac{1}{V} \left[\int_{V_M} D dv + \int_{V_I} D dV \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.128)$$

引入

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma^M \rangle &= \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \sigma dV, & \langle D^M \rangle &= \frac{1}{V_M} \int_{V_M} D dv \\ \langle \sigma^I \rangle &= \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \sigma dv, & \langle D^I \rangle &= \frac{1}{V_I} \int_{V_I} D dv \end{aligned} \right\}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= v_f \langle \sigma^I \rangle + (1 - v_f) \langle \sigma^M \rangle \\ \langle D \rangle &= v_f \langle D^I \rangle + (1 - v_f) \langle D^M \rangle \end{aligned} \right\} \quad (8.129)$$

应用(8.124)和(8.129),上式可以写为

$$\left. \begin{aligned} C^* \epsilon^0 - e^{*T} E^0 &= C^M \epsilon^0 - e^{MT} E^0 + v_f (\Delta C \langle \epsilon^I \rangle - \Delta e^T \langle E^I \rangle) \\ e^* \epsilon^0 + \alpha^* E^0 &= e^M \epsilon^0 + \sigma^M E^0 + v_f (\Delta e \langle \epsilon^I \rangle + \Delta \alpha \langle E^I \rangle) \end{aligned} \right\} \quad (8.130)$$

如果我们能够确定 $\langle \epsilon^I \rangle, \langle E^I \rangle$ 与均匀场 ϵ^0, E^0 之间的关系,那么,就可以由此式得到计算压电复合材料有效常数的计算公式。

Dilute 模型 Dilute 模型的基本思想是假定夹杂之间无相互作用,夹杂中的平均场等于无限大基体中单个夹杂的内部场,这样由(8.118)有

$$\left. \begin{aligned} \langle \epsilon^I \rangle &= A \epsilon^0 + B E^0 \\ \langle E^I \rangle &= a \epsilon^0 + b E^0 \end{aligned} \right\} \quad (8.131)$$

代入(8.129),比较方程两边 ϵ^0 和 E^0 的系数,得到

$$\left. \begin{aligned} C^* &= C^M + v_f(\Delta CA - \Delta e^T a) \\ e^* &= e^M + v_f(\Delta e A + \Delta a a) \\ a^* &= a^M + v_f(\Delta e B + \Delta a b) \end{aligned} \right\} \quad (8.132)$$

式中 A, B, a, b 依赖于基体和夹杂的材料常数以及夹杂的形状。与夹杂的大小无关。

Mori-Tanaka 模型

Mori-Tanaka 模型假定单个夹杂的周围仍是基体,但承受 $\langle \epsilon^M \rangle$ 和 $\langle E^M \rangle$, 因此

$$\left. \begin{aligned} \langle \epsilon^I \rangle &= A \langle \epsilon^M \rangle + B \langle E^M \rangle \\ \langle E^I \rangle &= a \langle \epsilon^M \rangle + b \langle E^M \rangle \end{aligned} \right\} \quad (8.133)$$

另外

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^0 &= v_f \langle \epsilon^I \rangle + (1 - v_f) \langle \epsilon^M \rangle \\ E^0 &= v_f \langle E^I \rangle + (1 - v_f) \langle E^M \rangle \end{aligned} \right\} \quad (8.134)$$

解方程(8.133)和(8.134),得到

$$\langle \epsilon^I \rangle = G \epsilon^0 + H E^0, \quad \langle E^I \rangle = g \epsilon^0 + h E^0 \quad (8.135)$$

式中 G, H, g, h 除与基体和夹杂的材料常数和夹杂的形状有关外,还是夹杂体积份数 V_f 的非线性函数。代入到(8.129),得到

$$\left. \begin{aligned} C^* &= C^M + v_f(\Delta CG - \Delta e^T g) \\ e^* &= e^M + v_f(\Delta e G + \Delta a g) \\ a^* &= a^M + v_f(\Delta e H + \Delta a h) \end{aligned} \right\} \quad (8.136)$$

Mori-Tanaka 和 Dilute 两种方法都给出了预报有效材料常数的解析公式,前者计入了夹杂之间的相互作用,是 v_f 的非线性函数。这里的主要问题是计算各常数张量中涉及到的 N^1, N^2, N^3 。当基体和夹杂都是横观各向同性压电材料,并且具有相同的材料主向时,文献[9,10]给出了夹杂形状为旋转椭球和圆柱时 N^i ($i=1,2,3$)的最简形式(附录 B)。

这里顺便指出,Dunn 和 Taya^[13]给出的公式侧重于用数学工具进行数值计算。理论上,与上面介绍的过程是等价的。

§ 8.5.2 典型数值结果

Wang^[5]首先用 Dilute 方法对3-1压电复合材料的有效性能进行了预测,基体是PZT-6B压电陶瓷,夹杂为圆柱形状(x_3 方向无穷大)的聚合物,两种材料的材料常数列于表8.1^[31]。

表 8.1 PZT-6B 压电陶瓷和聚合物的材料常数

	弹性刚度 (10^{10}Nm^{-2})					压电系数 (cm^{-2})			介电常数 (10^{-10}cvm^{-1})	
	C_{11}	C_{33}	C_{44}	C_{12}	C_{13}	e_{31}	e_{33}	e_{15}	a_{11}	a_{33}
PZT-6B	16.8	16.3	2.71	6.0	6.0	-0.9	7.1	4.6	36	34
聚合物	0.45	0.45	0.11	0.24	0.24	0	0	0	0	0

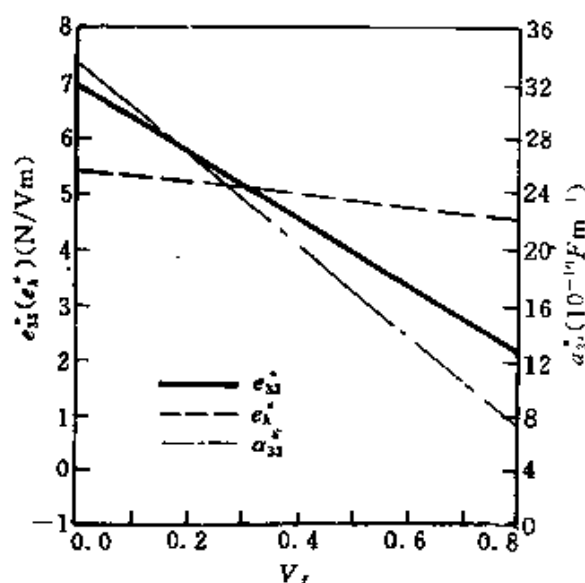


图 8.6 有效压电和介电常数随夹杂体积份数的变化

图8.6给出了工程应用中较为重要的几个材料常数 e_{33}^* , a_{33}^* , $e_A^* = e_{33}^* + 2e_{31}^*$ (静压压电系数)的预测结果。

另外,为了考虑夹杂形状和夹杂之间的相互作用对有效材料常数的影响,Wang^[10]又使用 Mori-Tanaka 方法对3-0压电复合材

料的有效性能进行了计算。材料仍为 PZT-6B 压电陶瓷和聚合物, 但夹杂形状为旋转椭球。

Dunn 和 Taya^[13]使用传统的细观力学模型自洽方法, Mori-Tanaka 方法, 微分法, 对压电系数进行了预报, 重点讨论了几种方法所得结果的差异和相同之处, 分析了夹杂形状对压电系数的影响, 并与已有的实验结果进行了比较。他们的结论是: 体积份数较小时, 几种方法都给出很接近的数值结果。表 8.2 列出了他们使用的材料常数, 数值结果如图 8.7~8.11 所示。

表 8.2 材料常数

	C_{11} (GPa)	C_{12} (GPa)	C_{13} (GPa)	C_{33} (GPa)	C_{44} (GPa)	e_{31} (N/Vm)	e_{33} (N/Vm)	e_{15} (N/Vm)	$\frac{k_{11}}{k_0}$	$\frac{k_{33}}{k_0}$
PZT-7A	148	76.2	74.2	131	25.4	-2.1	9.5	9.2	460	235
PZT-5	121	75.4	75.2	111	21.1	-5.4	15.8	12.3	916	830
环氧	8.0	4.4	4.4	8.0	1.8	0	0	0	4.2	4.2
树脂	3.86	2.57	2.57	3.86	0.64	0	0	0	9.0	9.0

$k_0 = 8.85 \times 10^{-12} (\text{C}^2/\text{Nm}^2) = \text{真空的介电常数}$

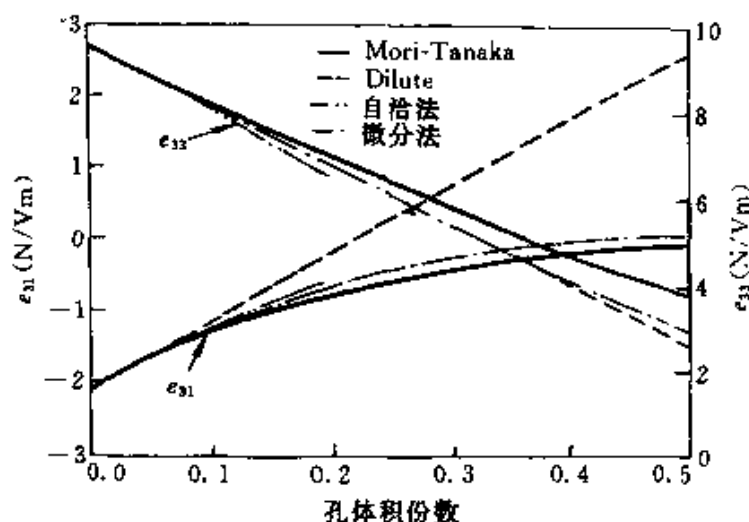


图 8.7 多孔压电陶瓷 PZT-7A 有效压电系数(e_{31})
随孔体积份数的变化(假定孔是球形的)^[13]

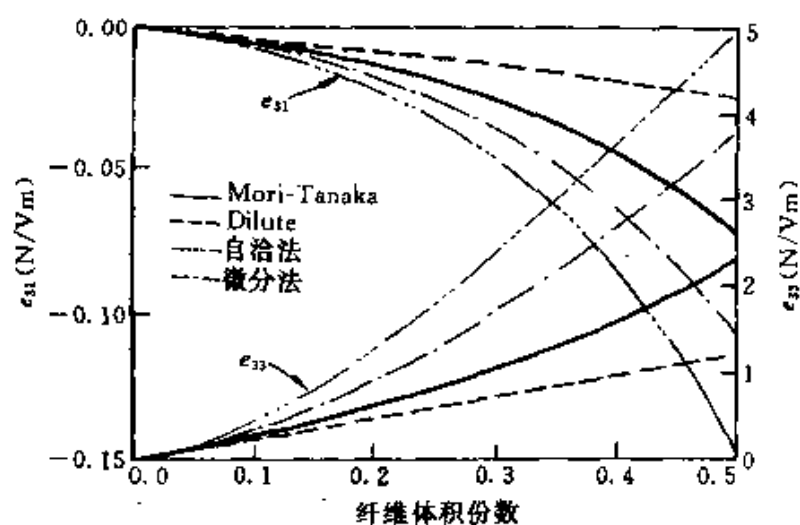


图 8.8 压电复合材料的有效压电系数 e_{31} 与夹杂体积份数的关系, 基体: PZT-7A, 夹杂: 短纤维环氧树脂 (a_3/a_1) [13]

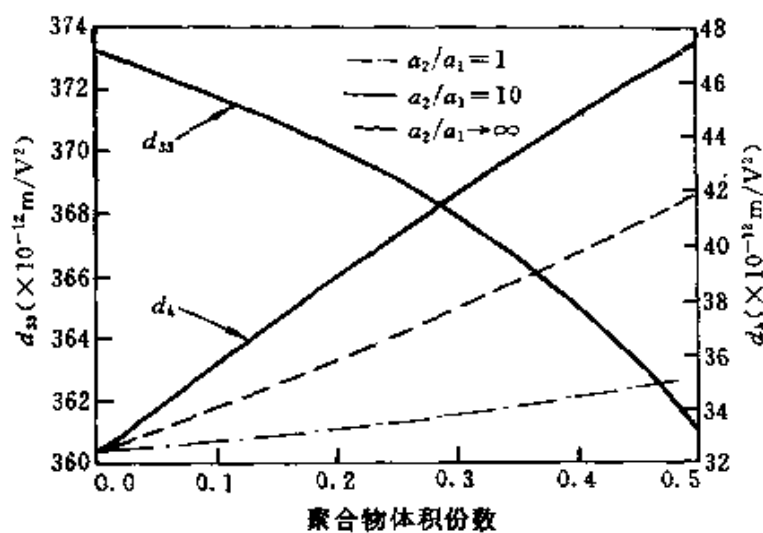


图 8.9 有效压电系数 d_{33} 与夹杂体积份数的关系
(基体: PZT-5, 夹杂: 圆柱形状聚合物, $a_3 \rightarrow \infty$)

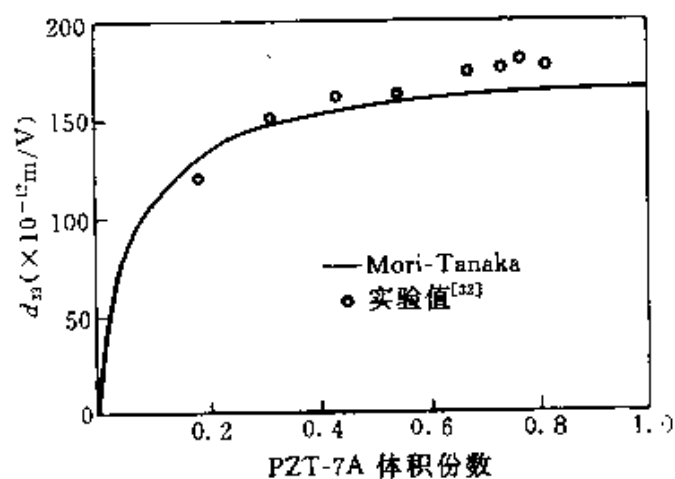


图 8.10 理论预测与实验值比较
(基体: PZT-7A; 夹杂: 环氧树脂, $a_3/a_1 \rightarrow \infty$)

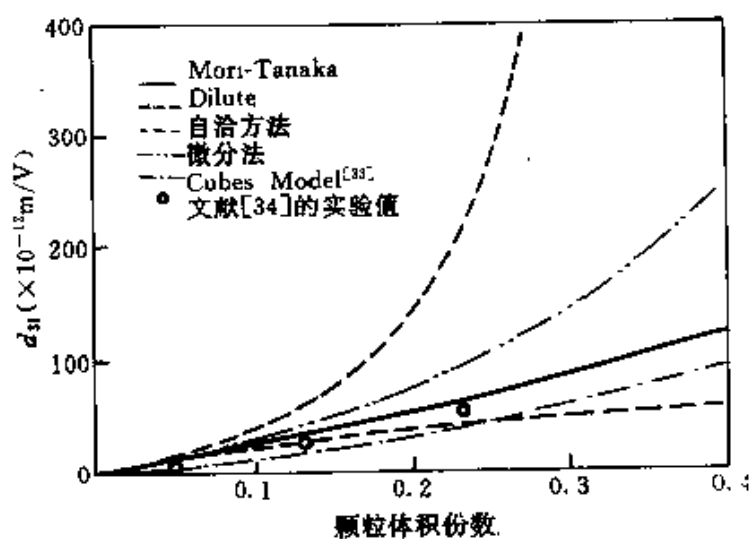


图 8.11 理论预测与实验值比较^[13]
(基体: 聚合物, 夹杂: PZT-5 颗粒, $a_3/a_1 = 1$)

附录 A

横观各向同性压电材料的压电方程(x_3 为极化方向)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ s_{zz} \\ 2s_{xy} \\ 2s_{yz} \\ 2s_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (A1)$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (A2)$$

附录 B

$N^i (i=1, 2, 3)$ 的非零元素(基体横观各向同性压电材料)

旋转椭球夹杂

$$\begin{aligned} N_{1111}^1 &= N_{2222}^1 \\ &= \frac{1}{2} \pi \beta^2 \int_0^1 (1 - \omega_3^2) \Delta^{-1} (\{ [\beta^2 (1 - \omega_3^2) C_{44}^0 + C_{33}^0 \omega_3^2] [\beta^2 (1 - \omega_3^2) (C_{11}^0 + 3C_{66}^0) + 4C_{44}^0 \omega_3^2] - \beta^2 \omega_3^2 (1 - \omega_3^2) (C_{13}^0 + C_{44}^0)^2 \} \\ &\quad + [\beta^2 (1 - \omega_3^2) \alpha_{11}^0 + \alpha_{33}^0 \omega_3^2] + [\beta^2 (1 - \omega_3^2) (C_{11}^0 + 3C_{66}^0) + 4C_{44}^0 \omega_3^2] [\beta^2 (1 - \omega_3^2) (e_{15}^0 + e_{33}^0 \omega_3^2)]^2 - \beta^2 \omega_3^2 (1 - \omega_3^2) e_{31}^0 + e_{15}^0 \} \\ &\quad + [\beta^2 (1 - \omega_3^2) (2e_{15}^0 C_{13}^0 + e_{15}^0 C_{44}^0 - C_{44}^0 e_{31}^0) + \omega_3^2 (2C_{13}^0 e_{33}^0 + 2C_{44}^0 e_{33}^0 - C_{33}^0 e_{31}^0 - C_{33}^0 e_{15}^0)] d\omega_3 \quad (B1) \end{aligned}$$

$$N_{3333}^1 = 4\pi \int_0^1 \omega_3^2 \Delta^{-1} \{ [\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{11}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)\alpha_{11}^0 + \omega_3^2\alpha_{33}^0] + \beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(e_{31}^0 + e_{15}^0)[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2] \} d\omega_3 \quad (B2)$$

$$\begin{aligned} N_{1122}^1 &= N_{2211}^1 \\ &= \frac{1}{2}\pi\beta^2 \int_0^1 (1 - \omega_3^2)\Delta^{-1} \{ [\beta^2(1 - \omega_3^2)(3C_{11}^0 + C_{66}^0) + 4C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{44}^0 + C_{33}^0\omega_3^2] - 3\beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(C_{13}^0 + C_{44}^0)^2 \} [\beta^2(1 - \omega_3^2)\alpha_{11}^0 + \alpha_{33}^0\omega_3^2] - 3\beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(e_{31}^0 + e_{15}^0)[\beta^2(1 - \omega_3^2)(2e_{15}^0C_{13}^0 + e_{15}^0C_{44}^0 - C_{44}^0e_{31}^0) + \omega_3^2(2C_{13}^0e_{33}^0 + 2C_{44}^0e_{33}^0 - C_{33}^0e_{31}^0 - C_{33}^0e_{15}^0)] + [\beta^2(1 - \omega_3^2)(3C_{11}^0 + C_{66}^0) + 4C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)e_{15}^0 + e_{33}^0\omega_3^2]^2 \} d\omega_3 \quad (B3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1133}^1 &= N_{2233}^1 \\ &= 2\pi \int_0^1 \omega_3^2 \Delta^{-1} \{ [\beta^2(1 - \omega_3^2)(C_{11}^0 + C_{66}^0) + 2C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{44}^0 + C_{33}^0\omega_3^2] - \beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(C_{13}^0 + C_{44}^0)^2 \} [\beta^2(1 - \omega_3^2)\alpha_{11}^0 + \alpha_{33}^0\omega_3^2] - \beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(e_{31}^0 + e_{15}^0)[\beta^2(1 - \omega_3^2)(2e_{15}^0C_{13}^0 + e_{15}^0C_{44}^0 - C_{44}^0e_{31}^0) + \omega_3^2(2C_{13}^0e_{33}^0 + 2C_{44}^0e_{33}^0 - C_{33}^0e_{31}^0 - C_{33}^0e_{15}^0)] + [\beta^2(1 - \omega_3^2)(C_{11}^0 + C_{66}^0) + 2C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)e_{15}^0 + e_{33}^0\omega_3^2]^2 \} d\omega_3 \quad (B4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{3311}^1 &= N_{3322}^1 \\ &= 2\pi\beta^2 \int_0^1 (1 - \omega_3^2)\Delta^{-1} \{ [\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{11}^0 + C_{44}^0\omega_3^2] \times [\beta^2(1 - \omega_3^2)\alpha_{11}^0 + \omega_3^2\alpha_{33}^0] + \beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(e_{31}^0 + e_{15}^0)^2 \times [\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2] \} d\omega_3 \quad (B5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1212}^1 &= \frac{1}{2}\pi\beta^4 \int_0^1 (1 - \omega_3^2)^2 \Delta^{-1} (\omega_3^2(e_{15}^0 + e_{31}^0) \\ &\quad \times [\beta^2(1 - \omega_3^2)(2e_{15}^0C_{13}^0 + e_{15}^0C_{44}^0 - C_{44}^0e_{31}^0) + \omega_3^2(2C_{13}^0e_{33}^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2C_{44}^0 e_{33}^0 - C_{33}^0 e_{31}^0 - C_{33}^0 e_{15}^0] + [\beta^2(1 - \omega_3^2)\alpha_{11}^0 \\
& + \omega_3^2\alpha_{33}^0]\{\omega_3^2(C_{13}^0 + C_{44}^0)^2 - (C_{11}^0 - C_{66}^0)[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{44}^0 \\
& + C_{33}^0\omega_3^2]\} - (C_{11}^0 - C_{66}^0)[\beta^2(1 - \omega_3^2)e_{15}^0 + e_{33}^0\omega_3^2]^2 d\omega_3
\end{aligned} \tag{B6}$$

$$\begin{aligned}
N_{1313}^1 &= N_{2323}^1 \\
&= -2\pi\beta^2 \int_0^1 \omega_3^2(1 - \omega_3^2)\Delta^{-1}[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2]\{(C_{13}^0 \\
& + C_{44}^0)[\beta^2(1 - \omega_3^2)\alpha_{11}^0 + \omega_3^2\alpha_{33}^0] + (e_{31}^0 + e_{15}^0)[\beta^2(1 \\
& - \omega_3^2)e_{15}^0 + e_{33}^0\omega_3^2]\}d\omega_3
\end{aligned} \tag{B7}$$

$$\begin{aligned}
N_{113}^2 &= N_{223}^2 \\
&= 2\pi\beta^2 \int_0^1 \omega_3^2(1 - \omega_3^2)\Delta^{-1}[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 \\
& - \omega_3^2)(e_{31}^0C_{44}^0 - C_{13}^0e_{15}^0) + \omega_3^2(C_{33}^0e_{31}^0 + C_{33}^0e_{15}^0 - C_{13}^0e_{33}^0 \\
& - C_{44}^0e_{33}^0)]d\omega_3
\end{aligned} \tag{B8}$$

$$\begin{aligned}
N_{311}^2 &= N_{322}^2 \\
&= 2\pi\beta^2 \int_0^1 (1 - \omega_3^2)\Delta^{-1}\{[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{11}^0 \\
& + C_{44}^0\omega_3^2] \times [\beta^2(1 - \omega_3^2)e_{15}^0 + e_{33}^0\omega_3^2] - \beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)[\beta^2(1 \\
& - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2] \times (C_{13}^0 + C_{44}^0)(e_{31}^0 + e_{15}^0)\}d\omega_3
\end{aligned} \tag{B9}$$

$$\begin{aligned}
N_{333}^2 &= 4\pi \int_0^1 \omega_3^2\Delta^{-1}\{[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{11}^0 \\
& + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)e_{15}^0 + e_{33}^0\omega_3^2] - \beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)[\beta^2(1 \\
& - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2](C_{13}^0 + C_{44}^0)(e_{31}^0 + e_{15}^0)\}d\omega_3
\end{aligned} \tag{B10}$$

$$\begin{aligned}
N_{11}^3 &= 2\pi\beta^2 \int_0^1 (1 - \omega_3^2)\Delta^{-1}\{\beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(C_{13}^0 + C_{44}^0)^2[\beta^2(1 \\
& - \omega_3^2)(C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2] - [\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 \\
& - \omega_3^2)C_{11}^0 + C_{44}^0\omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{44}^0 + C_{33}^0\omega_3^2]\}d\omega_3
\end{aligned} \tag{B11}$$

$$N_{33}^3 = 4\pi \int_0^1 \omega_3^2\Delta^{-1}\{\beta^2\omega_3^2(1 - \omega_3^2)(C_{13}^0 + C_{44}^0)^2[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0$$

$$+ C_{44}^0 \omega_3^2] - [\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0 \omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{11}^0 + C_{44}^0 \omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{44}^0 + C_{33}^0 \omega_3^2]d\omega_3 \quad (B12)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta = & -c^{-8} \det(D) \\ = & [\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{66}^0 + C_{44}^0 \omega_3^2] \times ([\beta^2(1 - \omega_3^2)a_{11}^0 + \omega_3^2 a_{33}^0] \{[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{11}^0 + C_{44}^0 \omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{44}^0 + C_{33}^0 \omega_3^2] - \beta^2 \omega_3^2(1 - \omega_3^2)(C_{13}^0 + C_{44}^0)^2\} + [\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{11}^0 + C_{44}^0 \omega_3^2][\beta^2(1 - \omega_3^2)e_{15}^0 + e_{33}^0 \omega_3^2]^2 - 2\beta^2 \omega_3^2(1 - \omega_3^2)(C_{13}^0 + C_{44}^0)(e_{31}^0 + e_{15}^0)[\beta^2(1 - \omega_3^2)(e_{15}^0 + e_{33}^0 \omega_3^2)] + \beta^2 \omega_3^2(1 - \omega_3^2)(e_{31}^0 + e_{15}^0)^2[\beta^2(1 - \omega_3^2)C_{44}^0 + C_{33}^0 \omega_3^2]) \end{aligned} \quad (B13)$$

圆柱形状夹杂

$$N_{1111}^1 = N_{2222}^1 = \frac{5C_{11}^0 - 3C_{12}^0}{2C_{11}^0(C_{11}^0 - C_{12}^0)}\pi \quad (B14)$$

$$N_{1122}^1 = N_{2211}^1 = \frac{7C_{11}^0 - C_{12}^0}{2C_{11}^0(C_{11}^0 - C_{12}^0)}\pi \quad (B15)$$

$$N_{3311}^1 = N_{3322}^1 = \frac{2\pi a_{11}^0}{C_{44}^0 a_{11}^0 + (e_{15}^0)^2} \quad (B16)$$

$$N_{1212}^1 = N_{2112}^1 = N_{2121}^1 = N_{1221}^1 = -\frac{C_{11}^0 + C_{12}^0}{2C_{11}^0(C_{11}^0 - C_{12}^0)}\pi \quad (B17)$$

$$N_{3311}^2 = N_{3322}^2 = \frac{2\pi e_{15}^0}{C_{44}^0 a_{11}^0 + (e_{15}^0)^2} \quad (B18)$$

$$N_{11}^3 = N_{22}^3 = -\frac{2C_{44}^0 \pi}{C_{44}^0 a_{11}^0 + (e_{15}^0)^2} \quad (B19)$$

参 考 文 献

- [1] S. Y. Du, J. Liang and J. C. Han, General coupled solution of anisotropic piezoelectric materials with an elliptic inclusion, *Acta Mechanica Sinica*, 1994, 10(3): 273-281.
- [2] M. Y. Chung and T. C. T. Ting, Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole, *Int. J. Solids Struct.*, 1996, 33(23): 3343-3361.
- [3] Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett and J. R. Willis, Fracture mechanics for piezoelectric ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, 40(4): 739-765.
- [4] A. N. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Phil. Mag.*,

1958, 3: 625—646.

- [5] B. Wang, Three-dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material, *Int. J. Solids Struct.*, 1992, **29**(3): 293—308.
- [6] Y. Benveniste, The determination of the elastic and electric fields in a piezoelectric inhomogeneity, *J. Appl. Phys.*, 1992, **72**(3): 1086—1095.
- [7] T. Chen, The translation of rigid ellipsoidal inclusion embedded in an anisotropic piezoelectric medium, *Int. J. Solids Struct.*, 1994, **31**(6): 891—902.
- [8] M. Dunn, Electroelastic Greens functions for transversely isotropic piezoelectric media and their application to the solution of inclusion and inhomogeneity problems, *Int. J. Engng. Sci.*, 1994, **32**(1): 119—131.
- [9] B. Wang and S. Y. Du, Effective properties of piezoelectric composites with spheroidal inclusions, *Int. J. Appl. Electromagnetics in Materials*, 1993, **3**: 289—295.
- [10] B. Wang, Effective behaviour of piezoelectric composites, *Appl. Mech. Rev.*, 1994, **47**(1): 112—121.
- [11] Y. Benveniste, Exact results concerning the local field and effective properties in piezoelectric composites, *J. Eng. Mater. Tech.*, 1994, **116**: 260—267.
- [12] K. Schulgasser, Relationships between the effective properties of transversely isotropic piezoelectric composites, *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, **40**(2): 473—479.
- [13] M. L. Dunn and M. Taya, Micromechanics predications of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites. *Int. J. Solids Struct.*, 1993, **30**(2): 161—175.
- [14] 张福学、孙康, 压电学, 国防工业出版社, 1984.
- [15] D. M. Barnett, J. Lothe, Synthesis of the sextic and the integral formalism, Green's function and surface waves in anisotropic elastic solids, *Phys. Norv.*, 1973, **7**: 13—19.
- [16] T. C. T. Ting, Some identities and the structure of Ni in the stroh formalism anisotropic elasticity, *Q. Appl. Math.*, 1988, **46**: 109—120.
- [17] C. B. Hwu, Thermal stress in an anisotropic plate disturbed by an insulated elliptic hole or crack, *J. Appl. Mech.*, 1990, **57**: 916—922.
- [18] D. M. Barnett and J. Lothe, Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators, *Phys. Status. Solids*, 1975, **B67**: 105—111.
- [19] H. Fan, Decay rates in a piezoelectric strip, *Int. J. Engng. Sci.*, 1995, **33**(8): 1095—1103.
- [20] J. X. Liu, B. Wang and S. Y. Du, Electroelastic fundamental solutions of an anisotropic piezoelectric medium with an elliptical hole, *Acta Mechanica Sinica*, 1997, **13**(1).
- [21] G. A. Lekhnitskii, Anisotropic plates, Gordon & Breach, New York, 1968.

- [22] Y. E. Pak, Circular inclusion problem in antiplane piezoelectricity, *Int. J. Solids Struct.*, 1992, **29**(19): 2403–2419.
- [23] Y. E. Pak, Crack extension force in a piezoelectric materials, *J. Appl. Mech.*, 1990, **57**(3): 647–653.
- [24] H. A. Sosa, Plane problems in piezoelectric media with defects, *Int. J. Solids Struct.*, 1991, **28**(4): 491–505.
- [25] H. A. Sosa, On the fracture mechanics of piezoelectric solids, *Int. J. Solids Struct.*, 1992, **29**(21): 2613–2622.
- [26] Y. E. Pak, Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials, *Int. J. Fract.*, 1992, **54**: 70–100.
- [27] S. B. Park and C. T. Sun, Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics, *Int. J. Fract.*, 1995, **70**: 203–216.
- [28] T. Mura, *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff, Boston, 1982.
- [29] A. Safari, R. E. Newnham, L. E. Cross and W. A. Schulze, Perforated PZT-Polymer composites for piezoelectric transducer applications, In: *Piezoelectricity*, Gordon and Breach Science Publisher, C. W. Taylor, etc. (ed). New York, 1985: 166–185.
- [30] Y. Shindo and E. Ozawa, Dynamic analysis of a cracked piezoelectric material Proceedings of IUTAM Symposium on Mechanical Modellings of New Electromagnetic Materials, Stockholm (Edited by R. K. T. Hsieh), 1990: 297
- [31] B. Wang and Y. L. Liu, The average field in piezoelectric media with randomly distributed inclusions, Proceedings of IUTAM Symposium on Mechanical Modellings of New Electromagnetic Materials, Stockholm (Edited by R. K. T. Hsieh), 1990: 313.
- [32] H. L. W. Chan and J. Unsworth, Simple model for piezoelectric ceramic/polymer 1 – 3 composites used in ultrasonic transducer applications, *IEEE Trans. Ultrason, Ferroelectrics and Frequency Control*, 1989, **36**: 434–441.
- [33] H. Banno, Recent developments of piezoelectric ceramic products and composites of synthetic rubber and piezoelectric ceramic particles. *Ferroelectrics*, 1983, **50**: 3–12.
- [34] T. Furukawa, K. Fujino and E. Fukada, Electromechanical properties in the composites of epoxy resin and PZT ceramics. *Jap. J. Appl. Phys.*, 1976, **15**: 2119–2129.
- [35] Y. Benveniste and G. J. Dvorak, Uniform fields and universal relations in piezoelectric composites, *J. Mech. Phys. Solids*, 1992, **40**(6): 1295–1312.
- [36] Z. Hashin, Analysis of composite materials—A Survey, *J. Appl. Mech.*, 1983, **50**: 481–505.
- [37] B. Wang, Three-dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric material, *Int. J. Engng. Sci.*, 1992, **30**(6).

第九章 复合材料细观计算力学

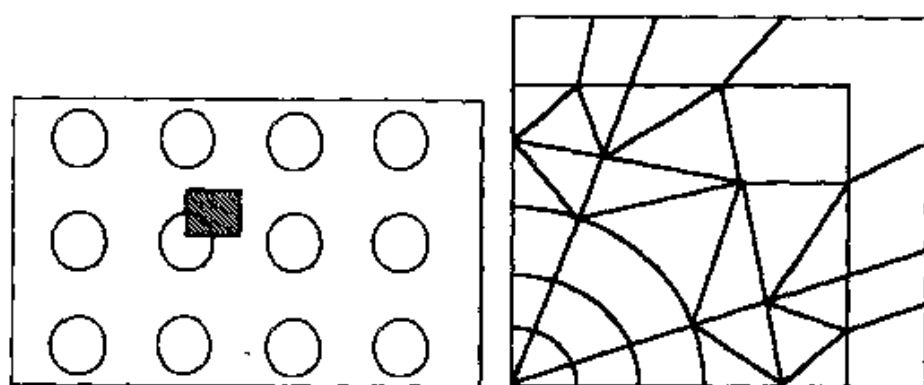
由于计算机的出现及广泛应用所导致的工业革命是显而易见的事实。针对复合材料及其结构,计算机技术的广泛应用也极大地提高了材料设计及结构性能评价的水准。尤其是由于基于计算机基础上的有限元方法可以用来求解具有任意复杂形状、具有任意性能的结构承受任意载荷的问题,使得人们在复合材料不同层次上广泛采用了有限元分析技术。细观层次上,复合材料作为由两种或两种以上组分材料组成的宏观非均匀材料可以用合适的具有某种周期分布的微结构材料来表示,这样针对某一周期的非均匀材料单元,利用通常的有限元及边界元方法,可以数值上求得纤维、基体及界面处的应力分布,在此基础上可以预报复合材料的有效性能。这弥补了第二章所介绍的有效性能理论预报方法无法预报纤维或夹杂高体积含量及具有复杂微结构材料等情况的不足。针对层合板等典型复合材料结构,人们改进并更新了有限元分析中的板、壳单元,不仅成功地计算得到了面内应力场的分布,还求得了层与层之间界面应力及位移场,解释了复合材料脱层破坏的机理。当复合材料作为一种结构材料而应用于某一大型结构时,为了宏观性能计算及分析的需要,复合材料可以作为一种均匀各向异性材料来处理。在本章中,我们将首先介绍有限元方法在复合材料性能预报及结构分析中的应用。然后将介绍复合材料破坏过程的计算机仿真技术。

§ 9.1 有限元方法

在细观层次上,人们利用有限元方法往往是为了计算纤维、基体及界面的细观应力场的分布,并进而预报材料的有效弹性模量

等性能。考察如图 9.1(a) 所示的单向纤维增强复合材料横截面, 由于纤维分布的周期性, 可以取出含有 $1/4$ 部分纤维横截面的材料单元, 如图 9.1(b) 所示, 单元中基体部分的尺寸可以依据复合材料中纤维及基体所占据的体积百分比而确定。对于图 9.1(b) 所示二维复合材料单元, 可以利用通常的有限元程序或边界元方法计算求得应力场的分布。

随着高性能计算机的出现及广泛应用, 针对具有复杂三维微结构的复合材料的细观力学计算也成为可能。很显然, 为了得到有效的数值计算结果, 网格必须很细, 而且要求材料具有一定的周期性, 即使这样, 计算量也相当庞大。随着加载过程, 材料内部可能会出现基体开裂、纤维与基体界面脱胶、纤维断裂等许多复杂的损伤模式。如果采用有限元数值方法模拟这一损伤破坏过程, 针对微结构的任何改变, 都必须重新划分单元进行迭代计算, 直至结构演化趋于稳定, 然后, 再增加载荷, 进行同样的模拟步骤。可以想象, 这种仿真过程的计算量极大, 目前计算机的发展水平还不允许人们对真实的复合材料的破坏过程进行仿真计算。在 § 9.2 及 § 9.3 中我们将介绍两种简化的破坏过程的计算机仿真手段。目前, 细观层次上有限元的应用主要为了求解细观应力场及材料的有效性能^[1,2,3,4,5]。



(a) 单向增强复合材料横断面

(b) 细观有限单元模型

图 9.1

复合材料层合板是由具有正交各向异性性质的单层组成的结构。进行有限元分析可以在两个层次上进行,如果不关心应力在层合板中的分布行为而只关心作为一种结构材料,层合板的宏观响应,那么可以把层合板当成各向异性均匀材料来处理。如果主要关注应力在各单层面内及层与层之间界面的分布行为,必须根据不同的单层划分单元。图 9.2 中绘出了 4 层单层组成的层合板单元

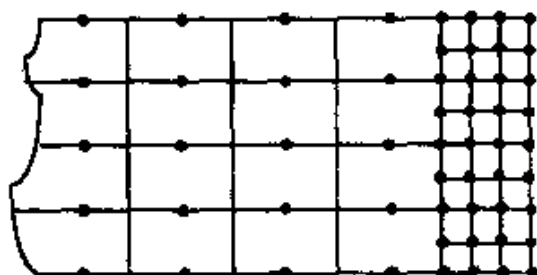


图 9.2 4 层板有限元模型

的典型有限元网格。

有限元方法是基于变分原理的弹性场近似求解方法。最常用的基础是虚位移原理,即

$$\int \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int t_k \delta u_k dS_0 + \int f_k \delta u_k dv$$

$$i, j, k = 1, 2, 3 \quad (9.1)$$

式中,符号 δ 表示变分。方程(9.1)的左边表示在所考察的材料区域内应变能,即内能的变分。而 t_k 为作用在材料外部边界 S 上 S_0 部分的而力, f_k 为体积力分量,(9.1)式表示平衡状态下内能变分等于外力功变分及体力功变分之和。

在有限元方法中,将所考虑的材料分割成不相重叠的许多单元 V_n ,这些单元由有限数目个节点相联。节点的位移可以用 $u_i^{(j)}$ 表示,它的物理意义是第 i 个节点的第 k 个位移分量。利用(9.1)式的虚位移原理可以建立关于节点位移 $u_i^{(j)}$ 的线性方程组,并进而求得节点位移。这种将无限自由度的连续体问题近似转化为有限自由度问题,并利用变分原理对这一有限自由度进行求解的方法,在

计算机的帮助下,得到了巨大的成功。

在某一单元内任一点的位移可以由单元节点位移近似表示成

$$u_i = \sum_{n=1}^N \varphi^{(n)} u_i^{(n)} \quad (9.2)$$

式中, $\varphi^{(n)}$ 为形状函数, N 为该单元总的节点数目, $u_i^{(n)}$ 表示节点位移, 也可以表示节点广义位移, 如对于一板单元, $u_i^{(n)}$ 可以代表三个位移分量及两个转角。

利用矩阵形式, 可以将所有材料的应变及位移之间的几何关系表示成

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (9.3)$$

式中, 对于小变形情况

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

将(9.2)式代入(9.3)式中, 可以得到

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{\varphi} \underline{U}^N = \underline{B} \underline{U}^N \quad (9.5)$$

式中, $\underline{\varphi}$ 为形状函数矩阵。再利用物理方程可以得到任一单元中一点处的应力为

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{B} \underline{U}^N \quad (9.6)$$

式中, $\underline{C}$ 为单元弹性模量矩阵。应变能的变分可以表示成

$$\int \underline{\sigma} \delta \underline{\varepsilon} dV = \delta (\underline{U}^N)^T \underline{K} \underline{U}^N \quad (9.7)$$

式中

$$\underline{K} = \int \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} dV \quad (9.8)$$

其中, $\underline{K}$ 为单元刚阵。

同样, 表面力及体积力变分同样可表示成

$$\int t_i \delta u_i dS^0 = \delta(\underline{U}^N)^T \underline{q} \quad (9.9)$$

$$\int f_i \delta u_i dv = (\delta \underline{U}^N) \underline{f} \quad (9.10)$$

利用(9.1)式, 可以建立

$$\underline{K} \underline{U}^N = \underline{F} \quad (9.11)$$

式中, $\underline{U}^N$ 为所有节点位移矢量, $\underline{K}$ 为总体刚阵, $\underline{F}$ 为外力场。

考虑含有 n 个正交各向异性单层组成的复合材料层合板(图 9.3)。作用于层合板某一断面的合力及合力矩分别为

$$\begin{aligned} N_x &= \int_0^t \sigma_{xx} dz, N_y = \int_0^t \sigma_{yy} dz, N_{xy} = \int_0^t \sigma_{xy} dz \\ M_x &= \int_0^t \sigma_{xx} z dz, M_y = \int_0^t \sigma_{yy} z dz, M_{xy} = \int_0^t \sigma_{xy} z dz \\ Q_x &= \int_0^t \sigma_{xz} dz, Q_y = \int_0^t \sigma_{yz} dz \end{aligned} \quad (9.12)$$

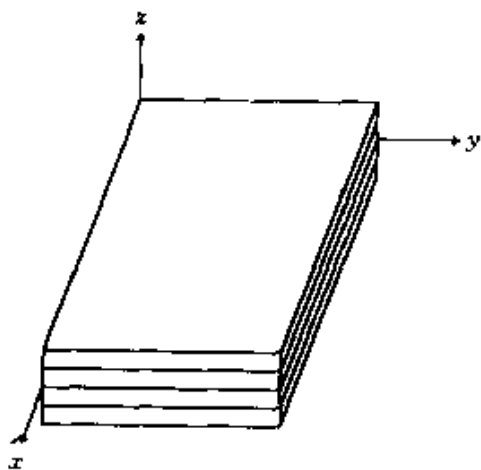


图 9.3 复合材料层合板

根据经典板理论, 横向剪切分量 $\sigma_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ 应该等于零, 即变形前为直线的板中面法线, 在变形后仍然保持为直线。根据 Reisser^[6] 及 Mindlin^[7] 一阶剪切变形理论, 位移场可以表示成

$$u = u_0(x, y) + z k_x(x, y)$$

$$v = v_0(x, y) + zk_y(x, y) \quad (9.13)$$

$$w = w(x, y)$$

式中, $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ 及 $w(x, y)$ 分别为参考中面的位移场, $k_x(x, y)$ 及 $k_y(x, y)$ 为剪切转角。(9.13)式的位移模式同经典薄板理论不同之处在于变形前为直线的板中面法线, 变形后虽然仍保持为直线, 但并不一定仍然垂直于中面。(9.13)式的变形模式也不能保证满足层合板上、下表面横向剪切应力为0的条件。

层合板外载同位移之间的关系可表示成

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ Q_x \\ Q_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + k_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} + k_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial k_x}{\partial x} \\ \frac{\partial k_y}{\partial y} \\ \frac{\partial k_x}{\partial y} + \frac{\partial k_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

式中, 层合板刚度可以通过单层板的刚度求得

$$A_{ij} = \int_0^t \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (9.15)$$

$$B_{ij} = \int_0^t \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} z dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (9.16)$$

$$D_{ij} = \int_0^t \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} z^2 dz \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (9.17)$$

$$A_{ij} = \int_0^t \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} k_{ij} dz \quad i, j = 4, 5 \text{ 对 } i, j \text{ 不求和} \quad (9.18)$$

式中, k_{ij} 为剪切修正因子。

如果复合材料层合板利用上述广义薄板理论来处理,为了进行有限元计算,根据不同的问题可以选择不同的单元类型来处理,例如三角形单元、矩形单元及等参单元等。对于前文所述的广义薄板理论,节点5个自由度可表示成

$$U^N = \begin{bmatrix} u_0^N \\ v_0^N \\ w^N \\ k_x^N \\ k_y^N \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

根据(9.14)式,单元刚阵可表示成

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} \underline{k}^{11} & \underline{k}^{12} & 0 & \underline{k}^{14} & \underline{k}^{15} \\ & \underline{k}^{22} & 0 & \underline{k}^{24} & \underline{k}^{25} \\ & & \underline{k}^{33} & \underline{k}^{34} & \underline{k}^{35} \\ \text{对称} & & & \underline{k}^{44} & \underline{k}^{45} \\ & & & & \underline{k}^{55} \end{bmatrix} \quad (9.20)$$

如果形状函数由下式定义

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_{n=1}^{N_1} \varphi_1^{(n)} u_0^{(n)}, v_0 = \sum_{n=1}^{N_1} \varphi_1^{(n)} v_0^{(n)}, w = \sum_{n=1}^{N_2} \varphi^{(n)} w^{(n)} \\ k_x &= \sum_{n=1}^{N_3} \varphi_3^{(n)} k_x^{(n)}, k_y = \sum_{n=1}^{N_3} \varphi_3^{(n)} k_y^{(n)} \end{aligned} \quad (9.21)$$

且 $\varphi_1^{(n)} = \varphi_3^{(n)} = \varphi^{(n)} = \varphi^{(n)}$, 刚度矩阵 K 分量为

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11} &= A_{11}G_{ij}^x + A_{16}(G_{ij}^{xy} + G_{ji}^{xy}) + A_{66}G_{ij}^y \\ K_{ij}^{12} &= A_{12}G_{ij}^{xy} + A_{16}G_{ij}^x + A_{26}G_{ij}^y + A_{66}G_{ij}^{xy} \\ K_{ij}^{14} &= B_{11}G_{ij}^x + B_{16}(G_{ij}^{xy} + G_{ji}^{xy}) + B_{66}G_{ij}^y \\ K_{ij}^{15} &= B_{12}G_{ij}^{xy} + B_{16}G_{ij}^x + B_{26}G_{ij}^y + B_{66}G_{ij}^{xy} \\ K_{ij}^{22} &= A_{26}(G_{ij}^{xy} + G_{ji}^{xy}) + A_{22}G_{ij}^y + A_{66}G_{ij}^x \\ K_{ij}^{24} &= B_{12}G_{ij}^{xy} + B_{16}G_{ij}^x + B_{26}G_{ij}^y + B_{66}G_{ij}^{xy} \\ K_{ij}^{25} &= B_{26}(G_{ij}^{xy} + G_{ji}^{xy}) + B_{66}G_{ij}^x + B_{22}G_{ij}^y \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$K_{ij}^{33} = A_{55}G_{ij}^x + A_{44}G_{ij}^y, K_{ij}^{34} = A_{55}G_{ij}^{xy}, K_{ij}^{35} = A_{44}G_{ij}^{xy}$$

$$K_{ij}^{44} = D_{11}G_{ij}^x + D_{16}(G_{ij}^{xy} + G_{ij}^{xy}) + D_{66}G_{ij}^y + A_{55}G_{ij}$$

$$K_{ij}^{45} = D_{12}G_{ij}^{xy} + D_{66} + D_{16}G_{ij}^x + D_{26}G_{ij}^y$$

$$K_{ij}^{55} = D_{26}(G_{ij}^{xy} + G_{ij}^{xy}) + D_{66}G_{ij}^x + D_{22}G_{ij}^y + A_{44}G_{ij}$$

式中

$$\begin{aligned} G_{ij}^x &= \int \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial x} dxdy, & G_{ij}^y &= \int \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial y} dxdy \\ G_{ij}^{xy} &= \int \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi^{(j)}}{\partial y} dxdy, & G_{ij}^0 &= \int \varphi^{(i)} \varphi^{(j)} dxdy \end{aligned} \quad (9.23)$$

利用上述的一阶剪切理论,针对不同的层合板结构,进行了许多卓有成效的分析工作,然而,数值结果的主要限制在于,横向剪切应力沿板厚方向为一常值,且层合板上、下表面横向剪切应力为零的条件不满足,而且还必须引入一个剪应力修正因子。

为了克服一阶剪切理论的缺陷,人们引入了不同类型的高阶剪切理论。例如,Reddy^[11]及 Putcha 和 Reddy^[12], Pandya 及 Kant^[13], Lo 等^[14,15]及 Reissner^[16], Kant 等^[17], Prathap 及 Somashekar^[18], Lakshminarayana 及 Ramani^[19], Tessler^[20]等均进行了大量有意义的工作。如下,我们将较详尽介绍 Putcha 及 Reddy^[21]提出的高阶剪切理论。

层合板的位移场可表示成

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) + z^2\zeta_x(x, y) + z^3\Phi_x(x, y) \\ v &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) + z^2\zeta_y(x, y) + z^3\Phi_y(x, y) \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (9.24)$$

式中, $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$ 及 $w_0(x, y)$ 为中面位移, φ_x, φ_y 为中面法线相对于 x 轴及 y 轴转角。函数 ζ_x, ζ_y 及 Φ_x, Φ_y 可以通过上、下表面横向剪应力 σ_4 及 σ_5 为 0 的条件确定,即

$$\sigma_5(x, y, \pm h/2) = 0, \sigma_4(x, y, \pm h/2) = 0 \quad (9.25)$$

对于正交各向异性层合板来说, (9.25) 式条件等同于上、下表面的横向剪应变为 0,

$$\begin{aligned}\varepsilon_4 &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y(x, y) + 2z\zeta_y(x, y) + 3z^2\Phi_y(x, y) + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_5 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x(x, y) + 2z\zeta_x(x, y) + 3z^2\Phi_x(x, y) + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (9.26)$$

利用 ε_4 及 ε_5 在层合板上、下表面等于 0 的条件,可以得到

$$\begin{aligned}\zeta_x &= \zeta_y = 0 \\ \Phi_x &= -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x\right), \quad \Phi_y = -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right)\end{aligned}\quad (9.27)$$

将(9.27)式代入(9.24)式中,可以得到

$$\begin{aligned}u &= u_0(x, y) + z\left[\varphi_x - \frac{4z^2}{3h^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x\right)\right] \\ v &= v_0(x, y) + z\left[\varphi_y - \frac{4z^2}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y\right)\right] \\ w &= w_0(x, y)\end{aligned}\quad (9.28)$$

利用(9.28)式可以得到冯·卡门应变为

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + z(k_1^0 + z^2k_1^2) \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + z(k_2^0 + z^2k_2^2) \\ \varepsilon_3 &= 0 \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_4^0 + z^2k_4^2 \\ \varepsilon_5 &= \varepsilon_5^0 + z^2k_5^2 \\ \varepsilon_6 &= \varepsilon_6^0 + z(k_6^0 + z^2k_6^2)\end{aligned}\quad (9.29)$$

式中

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2, \quad k_1^0 = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ k_1^2 &= -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad \varepsilon_2^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \quad k_2^0 = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ k_2^2 &= -\frac{4}{3h^2}\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \varepsilon_4^0 &= \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y}, k_4^2 = -\frac{4}{h^2}\left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_5^0 &= \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}, k_5^2 = -\frac{4}{h^2}\left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned}\quad (9.30)$$

$$\epsilon_u^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, k_6^0 = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

$$k_6^2 = -\frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

层合板的动态平衡方程可表示如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= I_1 \ddot{u}_0 + \bar{I}_2 \ddot{\varphi}_x - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= I_1 \ddot{v}_0 + \bar{I}_2 \ddot{\varphi}_y - \frac{4}{3h^2} I_4 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x} + N_6 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_6 \frac{\partial w}{\partial x} + N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &+ q - \frac{4}{h^2} \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial y} \right) + \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right) \\ &= I_1 \ddot{w} - \left(\frac{4}{3h^2} \right)^2 I_7 \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) + \frac{4}{3h^2} I_4 \left(\frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \left(\frac{\partial \ddot{\varphi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\varphi}_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 + \frac{4}{h^2} R_1 - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_5}{\partial y} \right) \\ &= \bar{I}_2 \ddot{u}_0 + \bar{I}_3 \ddot{\varphi}_x - \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 + \frac{4}{h^2} R_2 - \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial P_6}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) \\ &= \bar{I}_2 \ddot{v}_0 + \bar{I}_3 \ddot{\varphi}_y - \frac{4}{3h^2} \bar{I}_5 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

式中

$$\begin{aligned} (N_i, M_i, P_i) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i(1, z, z^3) dz \quad (i = 1, 2, 6) \\ (Q_2, R_2) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4(1, z^2) dz \\ (Q_1, R_1) &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5(1, z^2) dz \end{aligned} \quad (9.32)$$

并且

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7) = \int_{-h/2}^{h/2} P(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

$$\bar{I}_2 = I_2 - \frac{4}{3h^2}I_4, \quad \bar{I}_5 = I_5 - \frac{4}{3h^2}I_7, \quad \bar{I}_3 = I_3 - \frac{8}{3h^2}I_6 + \frac{16}{9h^4}I_7 \quad (9.33)$$

如果将 $u_0, v_0, \omega_0, \varphi_x$ 及 φ_y 作为未知数并利用(9.31)式建立变分原理求解, 由于含有 $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$ 及 $\partial^2 \omega / \partial x \partial y$ 项, 这样不仅要求形状函数保证单元之间位移的连续性, 而且还要求位移场的导数也必须连续, 这大大地增加了解题的难度。

因此, 如果将 $u_0, v_0, \omega, \varphi_x, \varphi_y, M_1, M_2, M_6, P_1, P_2$ 及 P_6 统统作为未知变量, 并建立相应的变分原理, 可以克服上述困难。根据层合板的本构方程可以得到

$$\begin{Bmatrix} \underline{N} \\ \underline{M} \\ \underline{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} & \underline{E} \\ \underline{B} & \underline{D} & \underline{F} \\ \underline{E} & \underline{F} & \underline{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}^0 \\ \underline{K}^0 \\ \underline{K}^2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \underline{Q} \\ \underline{R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{A}} & \underline{\bar{D}} \\ \underline{\bar{D}} & \underline{\bar{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\bar{\varepsilon}} \\ \underline{\bar{K}}^2 \end{Bmatrix} \quad (9.34)$$

式中

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (9.35)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z^2, z^4) dz$$

式中 Q_{ij} 是层合板刚度矩阵。

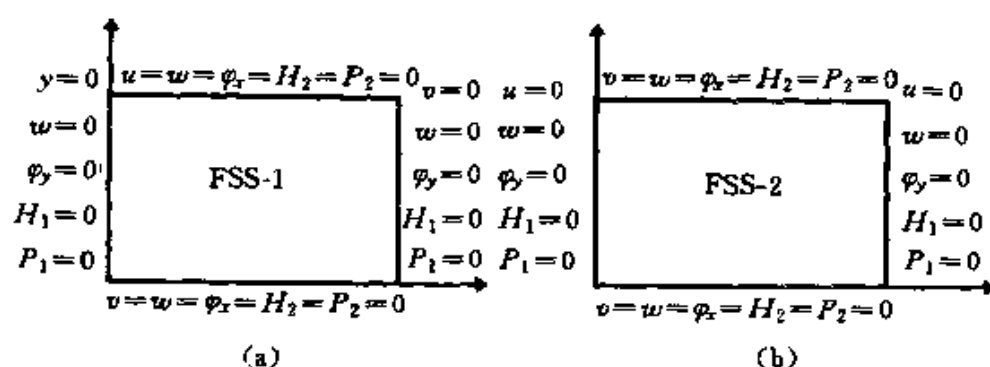


图 9.4 简支条件下对称(a)及反对称(b)复合材料层合板

根据(9.31)式及(9.34)式, 可以进一步建立相应的变分原

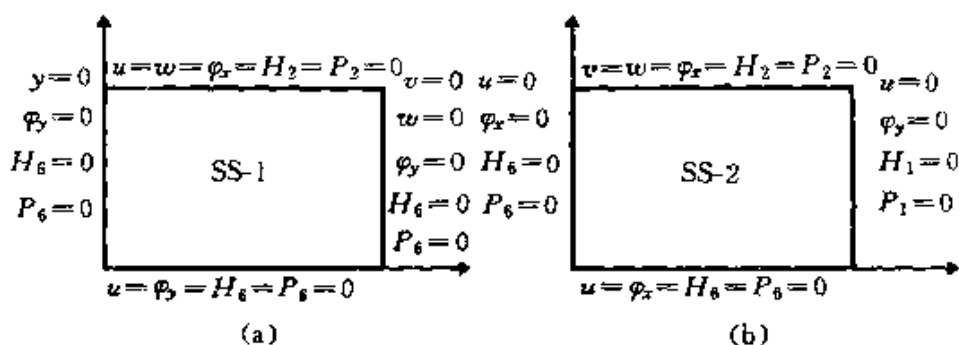


图 9.5 复合材料层合板边界条件

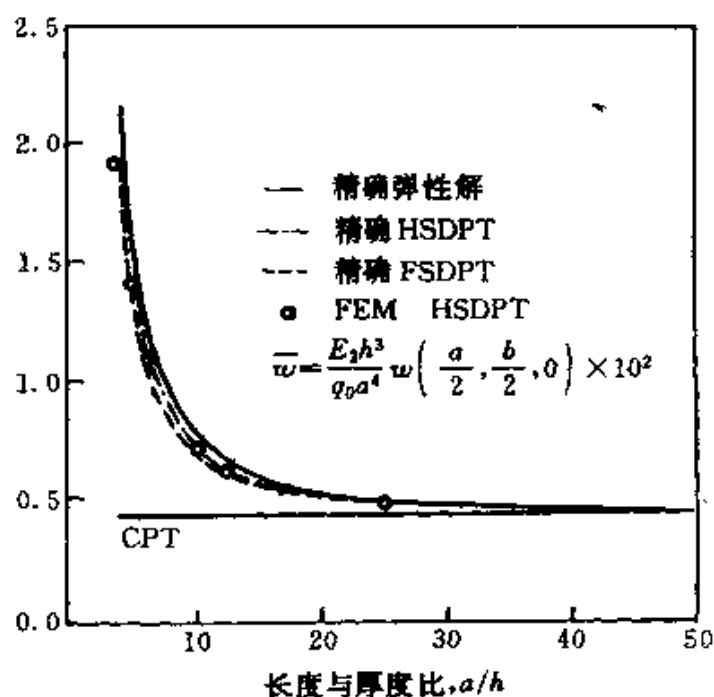


图 9.6 三层正交铺设层合板($0^\circ/90^\circ/0^\circ$)在正弦载荷作用下最大挠度随层合板长度与厚度的比率变化曲线^[21]

理,用有限元方程求解节点的自由度。

作为一个算例,考虑如图 9.4 所示的简支层合板在弯曲载荷作用下。为了分析方便,研究两种类型的层合板,一是正交对称铺设的层合板(FSS-1),另一种为反对称角铺设的层合板(FSS-2),

每一单层均具有相同的厚度, 且材料性能为

$$\begin{aligned} E_1/E_2 = 25, \quad G_{12}/E_2 = 0.5, \quad G_{23}/E_2 = 0.2 \\ \gamma_{12} = 0.25, \quad G_{13} = G_{12}, \quad \gamma_{13} = \gamma_{12} \end{aligned} \quad (9.36)$$

由于问题的对称性, 可以取原层板的1/4进行详尽分析, 其边界条件如图9.5所示。

为了考核有限元的计算效果, 可以利用弹性精确解与引入一阶剪切(FSDPT)及二阶剪切假设后的解析解进行比较。在一阶剪切理论中, 将剪切修正系数取为 $K_1^* = K_2^* = 5/6$ 。在静态正弦弯曲载荷作用下, 三层正交层合板的最大挠度 $\bar{w}$, 面内正应力 $\bar{\sigma}_x$ 及横向剪应力 $\bar{\sigma}_{yx}$ 随层合板几何尺寸变化曲线如图9.6, 图9.7及图9.8所

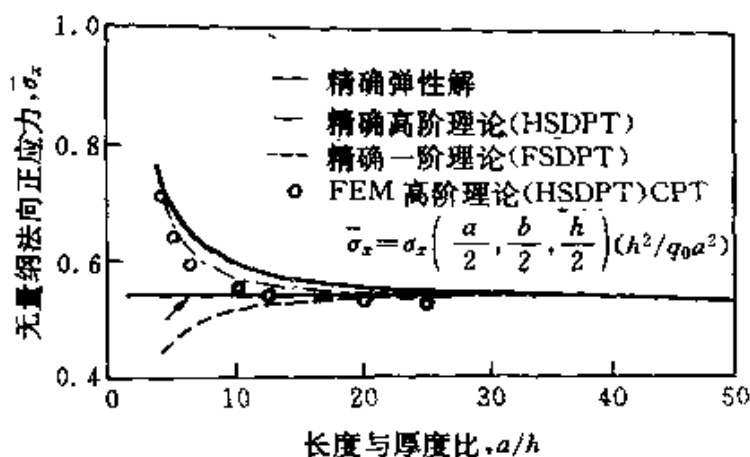


图 9.7 三层板(0°/90°/0°) 面内正应力^[21] $\bar{\sigma}_x$ 随 a/h 变化曲线

示。其中 CPT 表示利用经典板理论得到的结果。计算得到的横向剪切应力分布如图 9.9 所示。

从上面分析结果可以发现, 高阶剪切理论对于中厚板 $5 \leq a/h \leq 20$ 是比较合适的, 当板很薄 $a/h \geq 50$ 时, 横向剪切变形可以忽略, 这时采用经典薄板理论也能得到比较准确的结果。很明显, 随着板厚的增加, 高阶剪切理论比一阶剪切理论预报的结果更加准确。

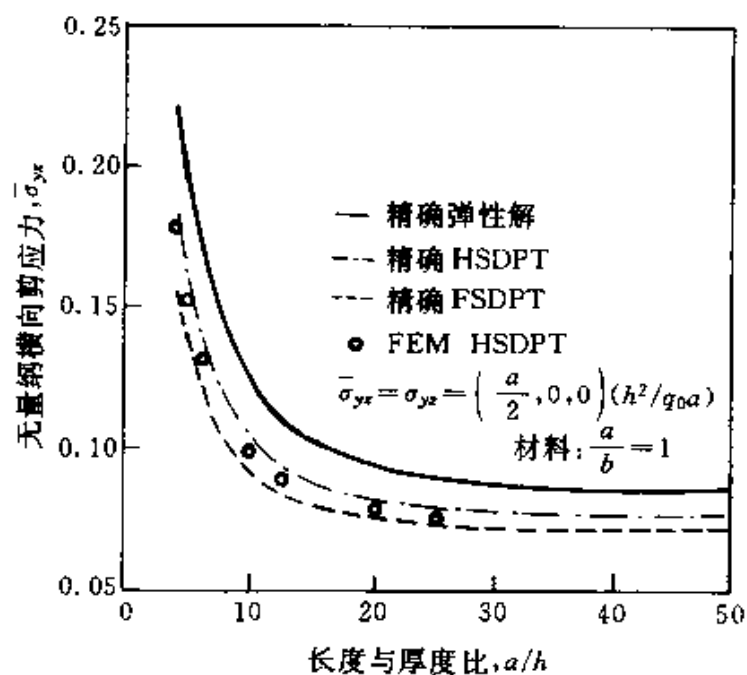


图 9.8 三层板(0°/90°/0°) 中横向剪切应力 σ_{yz} 随 a/h 变化曲线^[21]

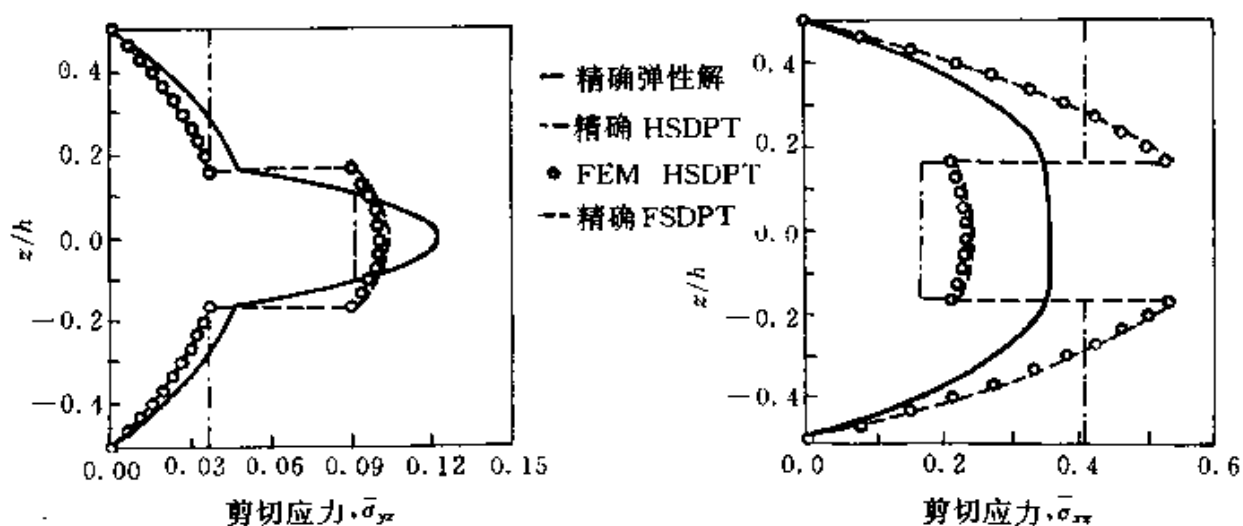


图 9.9 三层板(0°/90°/0°) 中横向剪应力沿板厚分布曲线^[21]

§ 9.2 复合材料损伤破坏过程的 Monte-Carlo 模拟

纤维增强复合材料的断裂涉及很复杂的损伤演化及积累过程。由于纤维的强度是一随机变量,损伤演化实际上是一随机过程。由于问题的复杂性,利用有限元方法还无法跟踪模拟材料的损伤演化过程。目前看来,比较可行的一种方法是结合剪滞模型等应力分析方法,再利用 Monte-Carlo 模拟产生不同的纤维强度分布,逐步模拟复合材料的破坏过程,并确定复合材料的强度。由于剪滞法的限制,目前这种模拟过程还仅限于单向纤维增强复合材料。仿真结果不仅从理论上预报了复合材料的损伤破坏机理,而且还预报了试件尺寸,纤维及界面强度等对复合材料强度性能的影响。下面,我们将详尽介绍单向纤维增强复合材料破坏过程的数值模拟方法。

1. 剪滞模型

考虑由一单层 N 根平行于 x 轴的纤维围成一封闭圆柱形结构的复合材料单元。依据剪滞模型的假设,纤维承担轴向拉伸载荷,而基体仅仅传递剪切载荷,对于树脂基复合材料来说,这一假设是比较合理的。通过建立沿 x 轴方向的平衡方程可以得到

$$\begin{aligned} A \frac{d\sigma_1}{dx} + h\tau_1 - h\tau_N &= 0 \\ A \frac{d\sigma_2}{dx} + h\tau_2 - h\tau_1 &= 0 \\ &\vdots \\ A \frac{d\sigma_N}{dx} + h\tau_N - h\tau_{N-1} &= 0 \end{aligned} \quad (9.37)$$

式中, $\sigma_i (i = 1, \dots, N)$ 是作用于第 i 根纤维轴向拉应力, A 为纤维的横截面积, h 为该试件单层厚度, $\tau_i (i = 1, \dots, N)$ 是第 i 及 $i + 1$ 根纤维之间基体中的剪应力。将纤维围成一圆环形状,其目的是为了忽略试件的边缘效应。纤维性能假设为线弹性(图9.10(a)),其应力-位移关系为

$$\sigma_i = E \frac{du_i}{dx} \quad (9.38)$$

式中, E 为纤维弹性模量。基体也认为承受剪切弹性变形, 当剪应力达到界面强度 τ_m 时, 界面将产生滑移, 而滑移阻力将降低为 τ_s , τ_s 为界面滑动摩擦阻力, 因此, 基体的剪切应力-应变关系如图 9.10(b), (c) 所示。

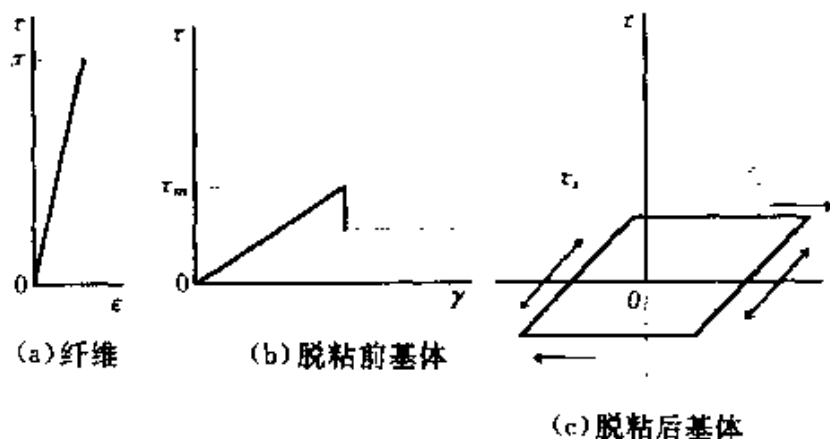


图 9.10 组分材料应力-应变曲线

在界面未产生滑移前, 基体的剪切应力-位移关系为

$$\tau_i = \frac{G}{d}(u_{i+1} - u_i) + \Delta\tau_a \quad (9.39)$$

其中, G 为基体剪切模量, d 为纤维之间距离, $\Delta\tau_a = \tau_s - G\gamma^*$, γ^* 为在该基体单元在由于界面滑移而导致的卸载起始阶段的剪切变形。在界面产生滑移后, 剪应力为常值。

$$\tau_i = \tau_s \quad (9.40)$$

将(9.38)及(9.39)或(9.40)式代入平衡方程(9.37)式中, 可以得到关于纤维轴向位移的二阶微分方程组, 如果给定边界条件, 可以直接求解这一微分方程组。然而, 随着加载过程, 复合材料中可能会发生纤维断裂及界面滑移等损伤, 因此, 边界条件做为一未知函数将随加载过程面变化。如下, 我们将引入有限差分方法对这一问题进行求解。这一方法曾被许多作者用来研究类似的问题, 例如, Goda 及 Phoenix^[22]。

有限差分模型如图9.11所示。图中,纤维单元 $F(i, j)$ 表示在节点 $(i, j-1)$ 及 (i, j) 之间的部分。基体单元 $M(i, j)$ 表示在节点 (i, j) 及 $(i+1, j)$ 之间部分。令 $u_{i,j}$ 表示节点 (i, j) 的轴向位移, 则二阶位移导数可表示成

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{(\Delta x)^2} \quad (j = 1, \dots, k) \quad (9.41)$$

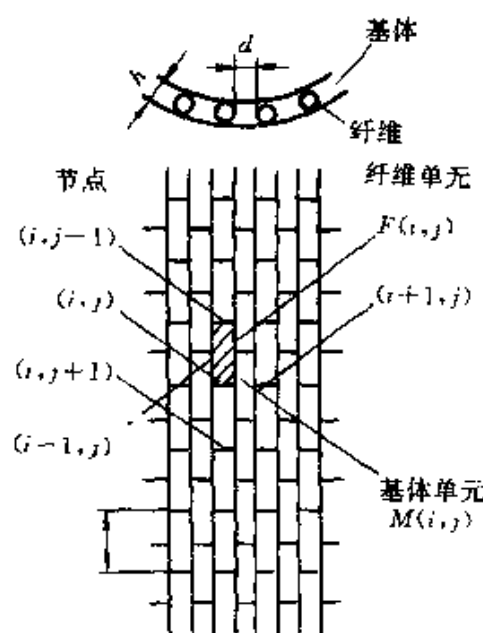


图 9.11 有限差分模型

其中, Δx 为节点间纤维段的长度, k 为一根纤维所含纤维单元数目。差分方程(9.41)式仅适用于未断裂的纤维单元。如果假设纤维单元 $F(i, j)$ 发生断裂, 可以认为断裂发生在该纤维段中点 $(i, (j-1)/2)$ 处, 由于该纤维段产生的应变为 0, 则

$$u_{i,j} = u_{i,j-1/2} \quad (9.42)$$

因此

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = \frac{4}{3(\Delta x)^2} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \quad (9.43)$$

可以将(9.41)及(9.43)式统一表示成:

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = \frac{4\{H_{i,j+1}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) - H_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j-1})\}}{(2 + H_{i,j} + H_{i,j+1})(\Delta x)^2} \quad (9.44)$$

式中, $H_{i,j}$ 即可等于0, 又可等于1, 可由一 Heaviside 阶梯函数表示,

$$H_{i,j} = H(X_{i,j} - \sigma_{i,j}) \quad (9.45)$$

其中, $X_{i,j}$ 为纤维段 $F(i, j)$ 的拉伸强度, $\sigma_{i,j}$ 为该段所受的拉伸应力, 由下式确定

$$\sigma_{i,j} = E \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \quad (9.46)$$

同样道理, (9.39)式及(9.40)式可以统一表示成:

$$\tau_{i,j} = P_{i,j} \left(G \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{d} + \Delta \tau_{ai,j} \right) + (1 - P_{i,j}) \tau_{i,j} \operatorname{sgn}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) \quad (9.47)$$

式中, 当该基体单元与纤维之间产生滑移时, $P_{i,j} = 0$, 否则 $P_{i,j} = 1$, $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 表示, 当括号中值为正时, 它等于1, 为负时, 它等于-1。

将(9.44)及(9.47)式代入平衡方程(9.37)式中, 可以建立差分方程为

$$C_{1(i,j)} u_{i,j-1} + C_{2(i,j)} u_{i-1,j} + C_{3(i,j)} u_{i,j} + C_{4(i,j)} u_{i+1,j} + C_{5(i,j)} u_{i,j+1} = C_{6(i,j)} \quad (9.48)$$

式中

$$\begin{aligned} C_{1(i,j)} &= \frac{4H_{i,j}}{2 + H_{i,j} + H_{i,j+1}} \\ C_{2(i,j)} &= \frac{P_{i-1,j} Gh (\Delta x)^2}{EA d} \\ C_{3(i,j)} &= \frac{4(H_{i,j} + H_{i,j+1})}{2 + H_{i,j} + H_{i,j+1}} - \frac{(P_{i-1,j} + P_{i,j}) Gh (\Delta x)^2}{EA d} \\ C_{4(i,j)} &= \frac{P_{i,j} Gh (\Delta x)^2}{EA d} \\ C_{5(i,j)} &= \frac{4H_{i,j+1}}{2 + H_{i,j} + H_{i,j+1}} \\ C_{6(i,j)} &= \frac{h (\Delta x)^2}{EA} \{ (1 - P_{i-1,j}) \tau_{i,j} \operatorname{sgn}(u_{i,j} - u_{i-1,j}) \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$-(1 - P_{i,j})\tau_i$$

$$\text{sgn}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + P_{i-1,j}\Delta\tau_{ai-1,j} - P_{i,j}\Delta\tau_{ai,j}\}$$

在数值模拟中,采用如下边界条件:

$$u_{i,0} = 0, u_{i,k} = \sigma^0 \frac{\Delta x}{E} + u_{i,k-1} \quad i = 1, \dots, N \quad (9.50)$$

式中, σ^0 为外加载荷。利用方程(9.48)式可以求得在任何外载情况下节点的位移。

算例 单向碳纤维增强环氧树脂复合材料,其材料性能如表 9.1 所示。

为了考察纤维与基体界面性能对复合材料宏观拉伸性能的影响,选用三种不同的界面摩擦阻力值, $\beta = \tau_i/\tau_m$ 分别等于 0.05, 0.2 及 0.5。

图 9.12 绘出了,当外载 $\sigma^0 = 4900\text{MPa}$,最弱的纤维断裂后,其周围单元应力分布情况。当 $\beta = 0.2$ 时,由于沿断裂纤维很长一段均产生界面滑移,这样很长一段纤维不能承担有效载荷。断裂纤维两侧的纤维中的应力集中因子为 1.025 ~ 1.05。当 $\beta = 0.5$ 时,由

表 9.1 分析所用的材料常数

纤维模量	278GPa
纤维横截面积	$2.55 \times 10^{-5}\text{mm}^2$
纤维之间距离	0.003mm
Weibull 形状参数	4.95
Weibull 位置参数	5762MPa
基体剪切模量	1327MPa
界面剪切强度	39.8MPa
复合材料厚度	0.0057mm

于纤维断裂导致的无效长度降低一半左右,应力集中也有较大程度的降低,然而,最大的应力集中系数却有所提高。对于具有较强界面的复合材料来说,应力集中的波及区域较小,但却较严重。

二种情况下断裂过程的模拟结果如图 9.13, 9.14 所示。

图 9.15 绘出了不同界面滑移阻力条件下,在材料断裂时刻,

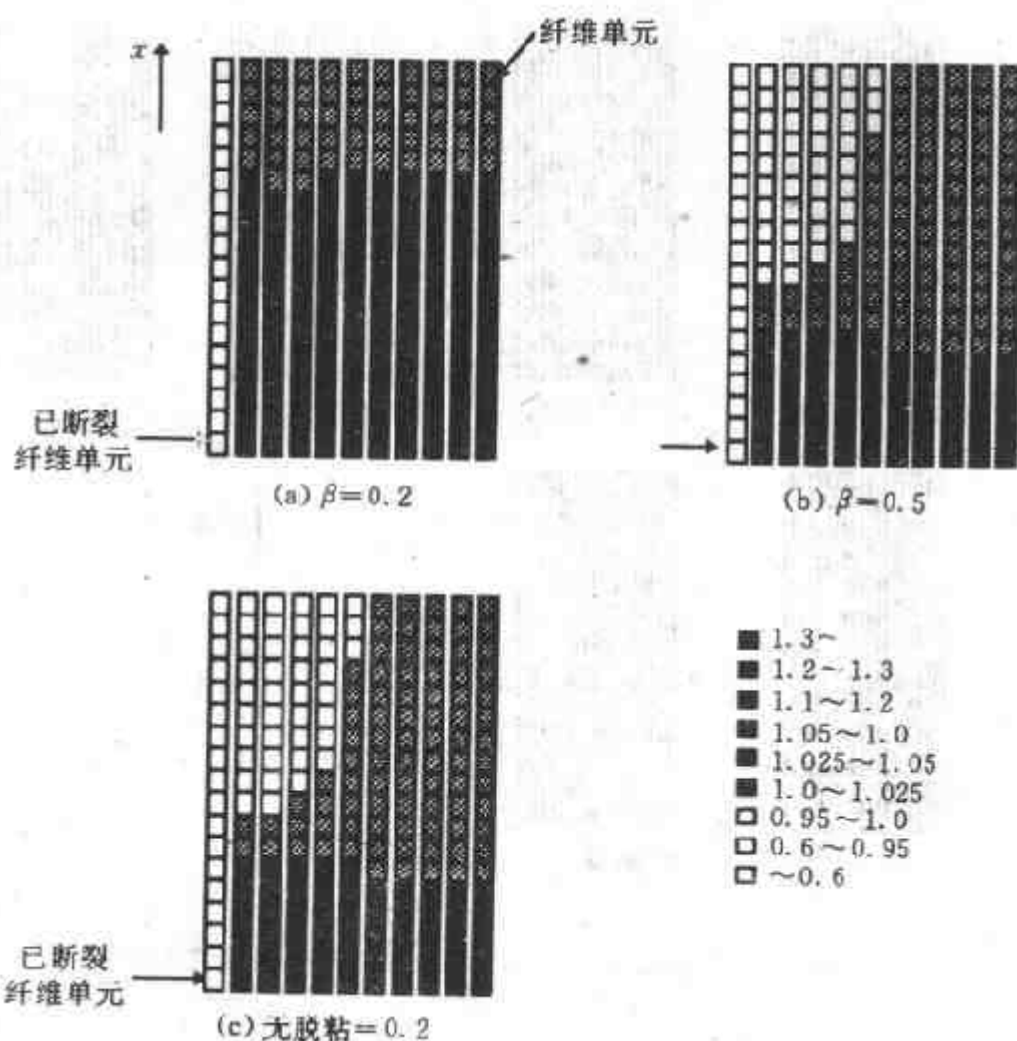


图 9.12 围绕一根断裂纤维应力场的分布^[22]

纤维断裂数目的频率图。从图中可以看出,对于界面较强的无滑移的复合材料试件,其损伤比较分散,强度也较高。对于界面摩擦阻力较小情况,由于应力集中波及区域较大,当一根纤维断裂后,即使载荷不增加,导致第二个纤维单元断裂的概率也比较大,这可能是强度比较低的原因。当然,具有不同纤维及基体的复合材料性能将不同,界面的影响也将有所不同。

相应于不同的纤维数目 $N = 10, 20$, 其中平均拉伸强度及分散系数如表 9.2 所示, CV() 括号中的值是 Weibull 形状参数的预报值。作为尺寸效应, 其平均拉伸强度及分散系数随纤维数目的

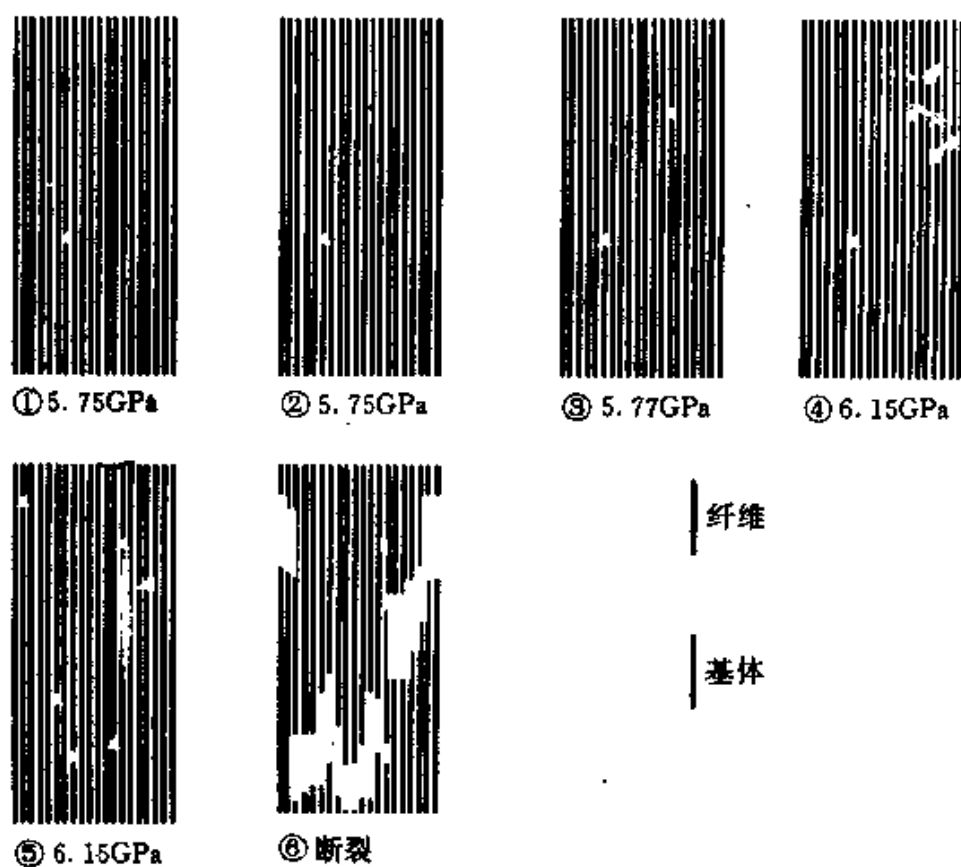


图 9.13 界面较弱($\beta = 0.5$) 复合材料断裂过程模拟结果

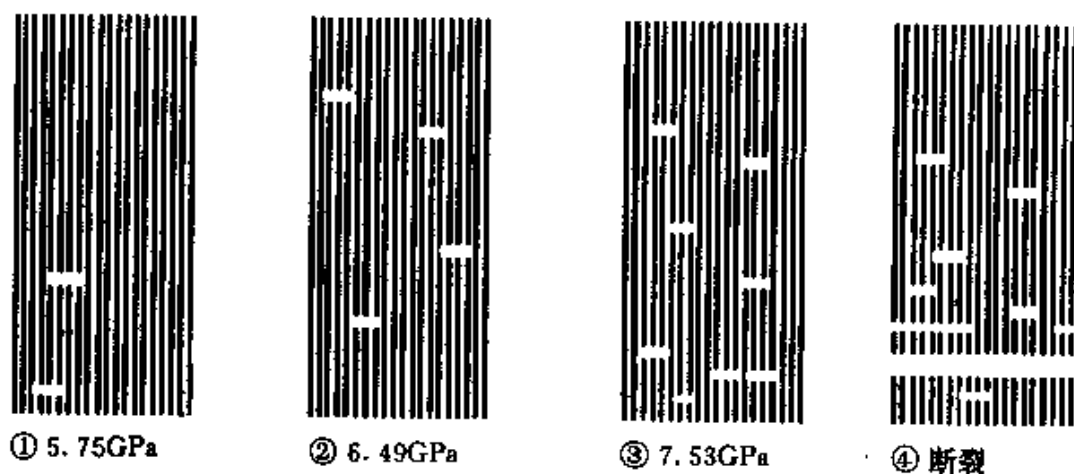


图 9.14 界面较强复合材料断裂过程模拟结果

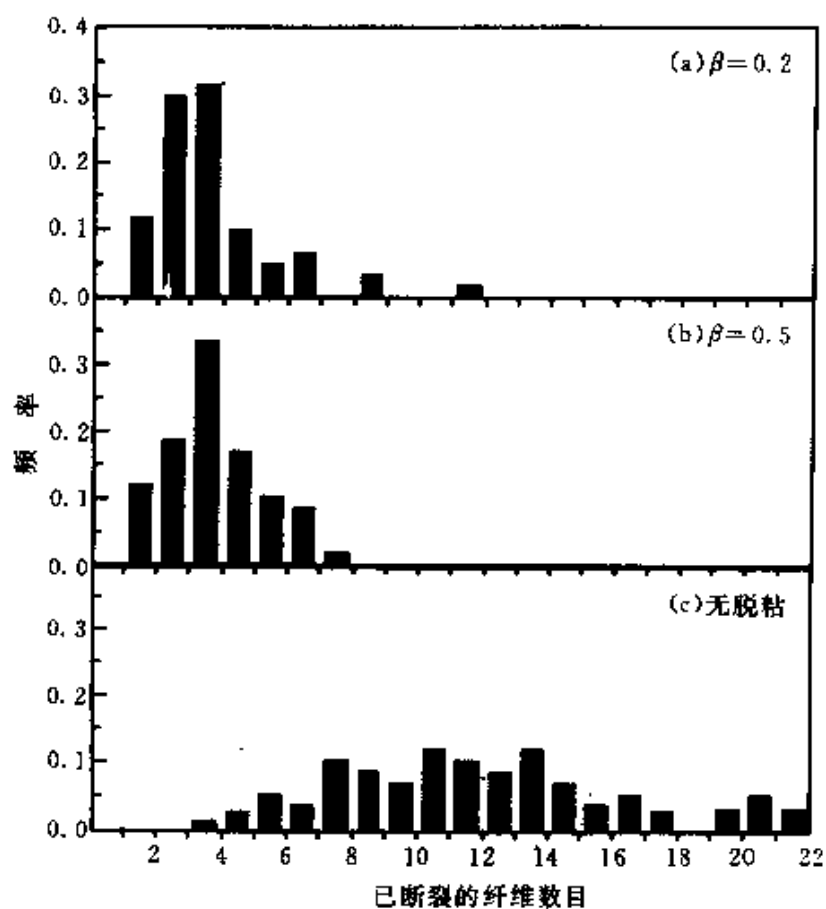


图 9.15 不同界面性能复合材料断裂前含有的已断裂的纤维数目分布直方图

变化曲线如图 9.16 所示。很显然,随尺寸增加,复合材料的平均强度及分散系数均将下降。

表 9.2 模拟得到的平均强度及变差系数

N	β	Ave (GPa)	CV(m_c) (%)
10	0.05	6.13	10.39(9.5)
	0.20	6.26	9.83(10.0)
	0.50	6.47	8.99(11.1)
	NDC	7.69	8.37(13.4)
20	0.20	6.06	8.15(11.7)
	0.50	6.27	7.98(12.0)
	NDC	7.57	6.96(16.2)

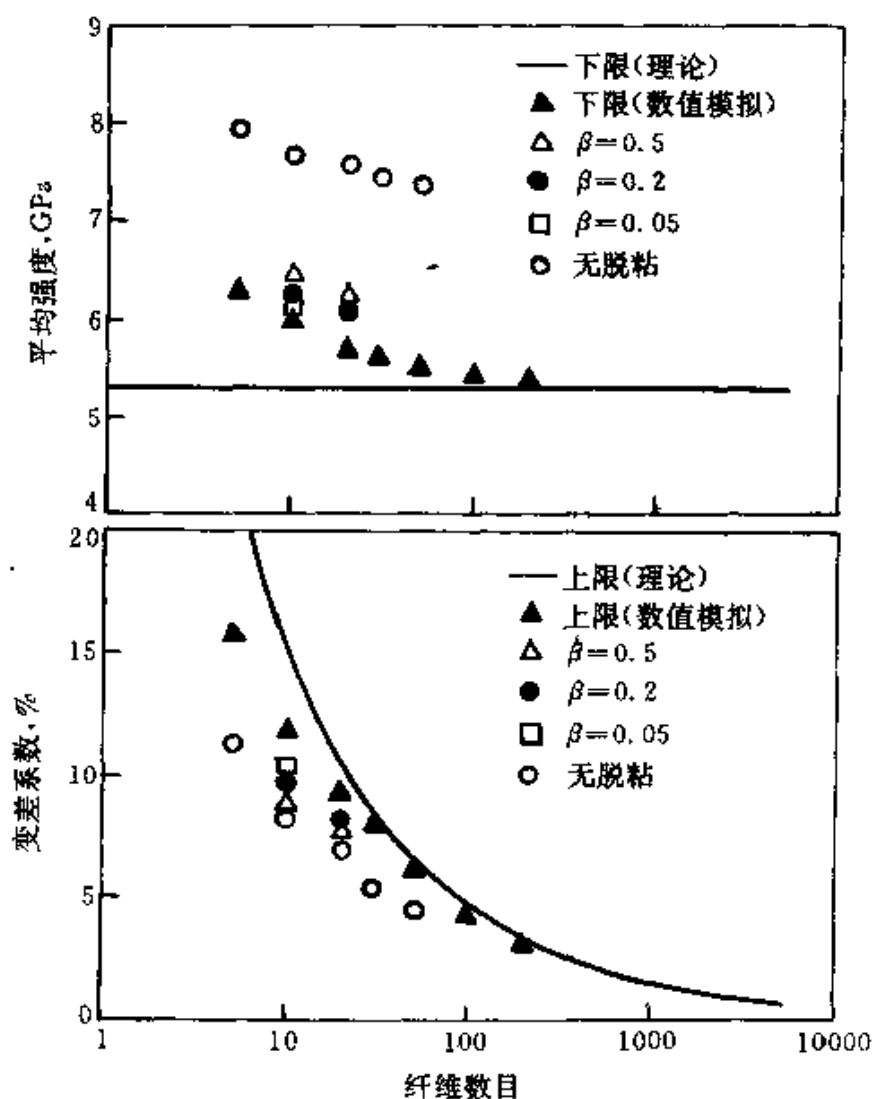


图 9.16 复合材料平均强度及变差系数^[22]随纤维数目变化曲线

§ 9.3 复合材料断裂过程模拟的格构模型

为了揭示材料断裂这一临界现象的物理本质,近年来,人们借用了许多统计物理的研究方法及手段。由于具有随机微结构材料断裂过程的复杂性,目前计算机的发展水平远未能使人们对真实材料的破坏过程进行计算机仿真。为了解决这一问题,许多统计物

理学家采用了一种被称为格构模型的方法。这种方法的核心在于,它不是将连续介质力学的控制方程进行离散,而是将连续介质用由离散的弹性杆、梁组成的格构来代替。为了使两种系统等效,要保证两种系统在外场作用下具有相同的响应。

目前,由于许多杰出物理学家的参与,这一领域的工作显得格外活跃^[23-26]。例如,Murat 等研究了短纤维增强树脂复合材料的弹性及断裂性能,得到了许多与实验观察相吻合的结果。如下,我们将以单向短纤维增强复合材料为例,详细阐述这一模型的实质,并对计算机模拟结果进行分析。

1. 模型及方法

首先,将纤维增强复合材料用周期分布的三角形格构来代替(图 9.17),各个节点之间由一弹性杆相连,其长度为 a ,大约与纤维直径相当。格构的变形模式有两种,一是沿杆的轴向拉伸与压

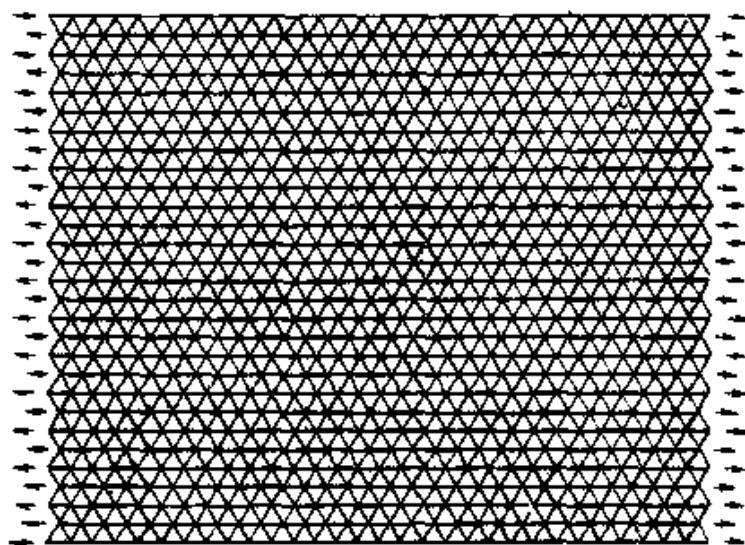


图 9.17 复合材料单元格构离散图

缩,其弹性常数为 k ,另一种是杆沿节点的转动,其转角刚度为 g 。各向同性材料可以由两个弹性常数表征性能,通过建立单轴拉伸及三轴压缩时格构与实际材料响应的等同性关系,可以求得 k, g 与材料弹性模量之间的关系,^[26]

$$k = \frac{2T}{\sqrt{3}}(\lambda + \mu), g = \frac{ka^2}{4}\left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}\right) \quad (9.51)$$

式中, T 为材料厚度, λ, μ 为 Lamé 常数。

格构的弹性能可表示成:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} k (\vec{u}_{ij} \cdot \vec{v}_{ij})^2 + \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \frac{g}{a^2} (\vec{u}_{ij} \cdot \vec{s}_{ij} - \vec{u}_{lj} \cdot \vec{s}_{lj})^2 \quad (9.52)$$

式中, $\vec{u}_{ij} = \vec{u}_i - \vec{u}_j$, 是两个相近结点的相对位移矢量, $\vec{v}_{ij}$ 为沿该邻近节点联线的单位矢量, $\langle ij \rangle$ 表示所有的相邻节点, $\vec{s}_{ij} = \vec{z} \times \vec{v}_{ij}$, $\vec{z}$ 为垂直于材料所在平面的单位矢量。(9.52) 式中第一项是杆件沿轴向变形而产生的弹性能, 第二项为两杆件之间角度变化而产生的弹性能。弹性能关于某一节点位移 $\vec{u}_i$ 的微分应给出作用于该节点的合力。当材料处于平衡时, 显然合力应该为 0, 即

$$\begin{aligned} -\frac{\partial U}{\partial \vec{u}_i} &= \sum_{\langle ij \rangle} k [(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{v}_{ij}] \vec{v}_{ij} \\ &+ \frac{g}{a^2} \sum_{\substack{j,l \\ \langle jil \rangle}} [(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{s}_{ij} - (\vec{u}_l - \vec{u}_i) \cdot \vec{s}_{il}] \cdot (\vec{s}_{ij} - \vec{s}_{il}) \\ &+ \frac{g}{a^2} \sum_{\substack{j,l \\ \langle jil \rangle}} [(\vec{u}_j - \vec{u}_i) \cdot \vec{s}_{ij} - (\vec{u}_l - \vec{u}_j) \cdot \vec{s}_{jl}] \vec{s}_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (9.53)$$

为了将格构的场方程(9.53)退化成连续弹性介质的场方程, 将位移场 $\vec{u}_j$ 及 $\vec{u}_l$ 围绕节点 i 进行泰勒展开, 并取前二阶项, 方程(9.53)成为

$$(3ka^2 + 12g) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + (ka^2 + 12g) \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + 2ka^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = 0 \quad (9.54a)$$

因此

$$(\lambda + \mu) \partial_x \partial_j u_j + \mu \partial_j \partial_j u_i = 0 \quad (9.54b)$$

(9.54b) 式正是各向同性材料连续介质场方程。如果考虑节点具有更多的自由度, 方程可以退化成广义弹性介质的场方程, 如微极

介质等。

考虑基体材料中随机分布有直径为 d , 长度为 l 的短纤维, 代替基体材料杆的弹性性能为 k_m, g_m , 纤维的性能为 k_f, g_f 。作为模拟的边界条件, 在左、右两端的节点各施加一常量位移 δ , 通过利用方程(9.53)式或能量极小条件, 可以求得各个节点的位移。作为组分材料的破坏准则, 可以认为当代替基体的某一弹性杆中应变超过基体的临界应变 ϵ_m^c 时, 该杆即认为已经断裂。这时, 它的弹性常数为 0, 同样, 当纤维中应变超过其临界应变 ϵ_f^c 时, 该段纤维将发生断裂。一般材料 $\epsilon_f^c < \epsilon_m^c$ 。

2. 模拟算例

模拟所采用的材料性能为 $E_m = 2\text{GPa}, E_f = 200\text{GPa}, \gamma_m = \gamma_f = 0.25, \epsilon_m^c = 0.05, \epsilon_f^c = 0.01$, 纤维直径 $d = 15\mu\text{m}, a = 30\mu\text{m}, T = 30\mu\text{m}$, 当外加位移 $\delta = a$ 时, 拉伸应变在基体及纤维中分布如图

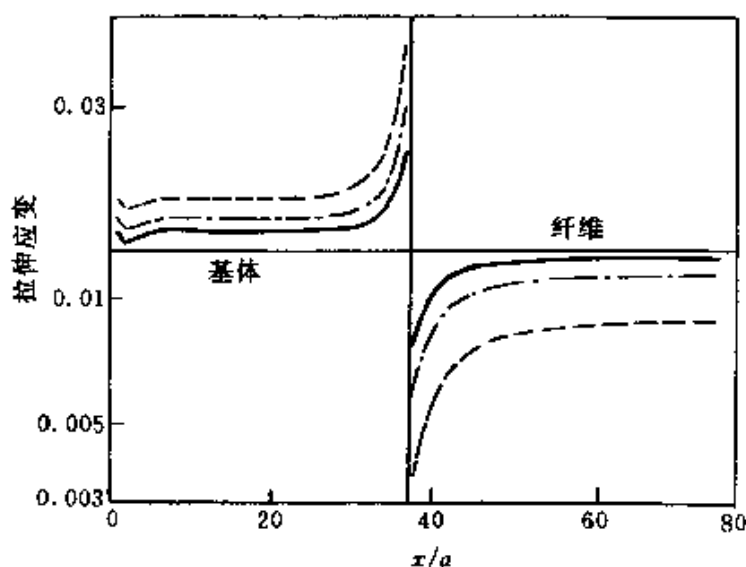


图 9.18 拉伸应变场在基体及纤维中分布^[26]

9.18 所示, 其中纤维位置位于 $38 \leq \frac{x}{a} \leq 113$ 之间。很明显, 在纤维尖端基体中存在较大的应力集中现象。纤维所承受的应力从尖端的 0 值逐渐恢复至稳态值。纤维临界长度可以定义为载荷恢复至稳态值的 97% 所需的长度。模拟预报的临界长度随 E_f/E_m 变化曲线如图 9.19 所示, 其中(a) 图相应于 20×150 格构, 纤维占据 75

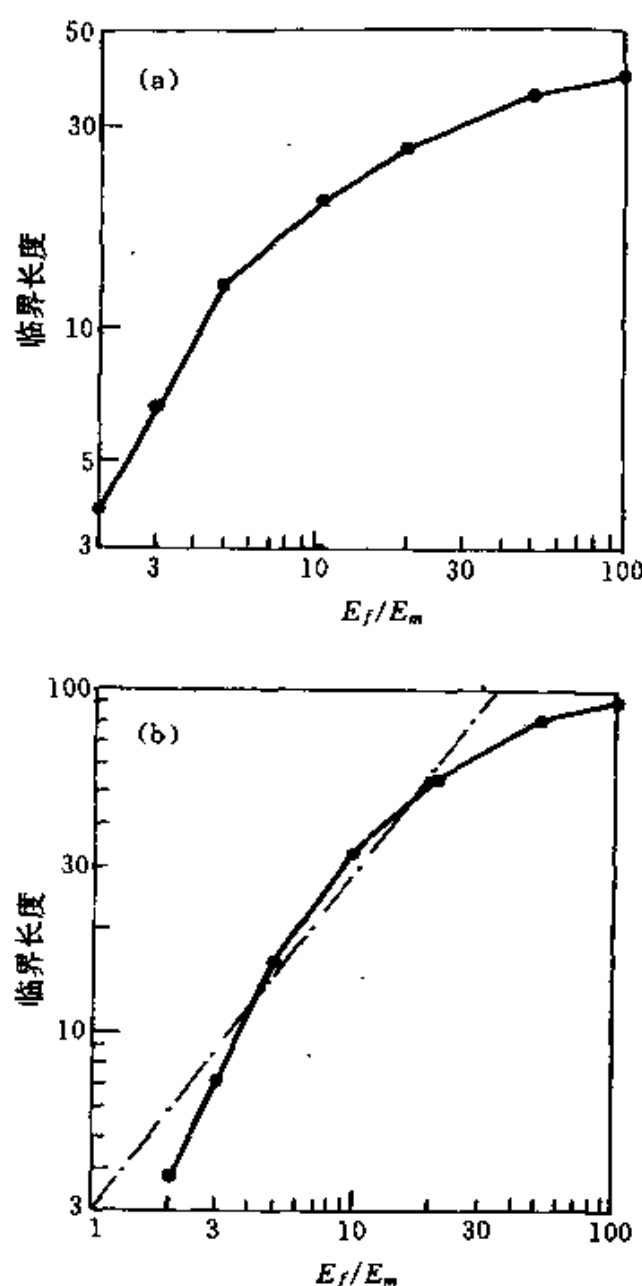


图 9.19 纤维临界长度随材料弹性模量变化曲线^[26]

个格点, (b) 图相应于格点为 100×300 , 且纤维长度占据 150 个格点情况。

短纤维复合材料杨氏模量随纤维长径比变化曲线如图 9.20 所示。杨氏模量随纤维体积含量变化曲线如图 9.21 所示。

短纤维复合材料断裂过程模拟结果如图 9.22 所示。其应力 - 应变关系如图 9.23 所示。平均断裂应力随纤维体积含量的变化曲

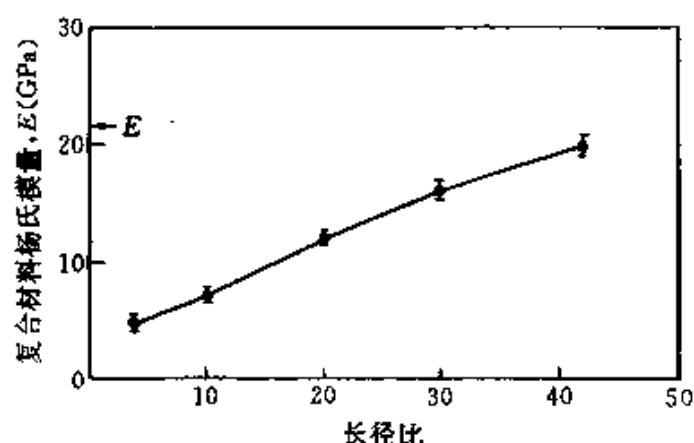


图 9.20 复合材料杨氏模量随纤维长径比变化曲线^[26]

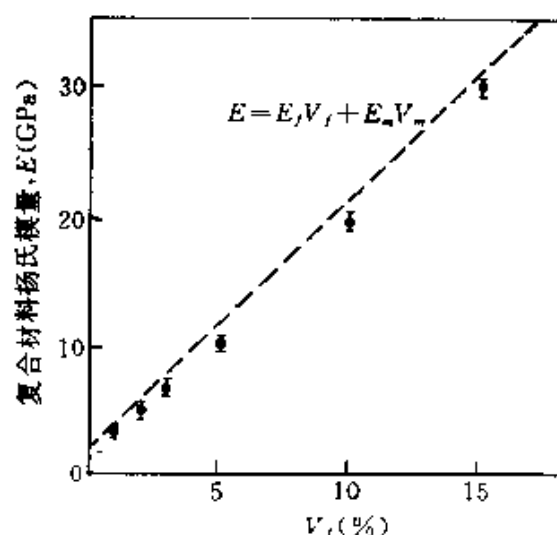


图 9.21 复合材料杨氏模量随纤维体积含量变化曲线^[26]

线如图 9.24 所示。复合材料断裂时,其平均应变随纤维体积含量变化曲线如图 9.25 所示。当纤维体积含量为 10% 时,复合材料平均断裂应力随纤维长径比变化曲线如图 9.26 所示。

复合材料断裂过程模拟的格构模型是将连续材料用离散的杆、梁等基本构元构成网架来等效,初始目的是为了揭示断裂过程的本质特征,如分形断面的维数、一些标度定律(scaling laws)的普适指数等。尽管该类模型远未达到能够用于工程实际材料的程

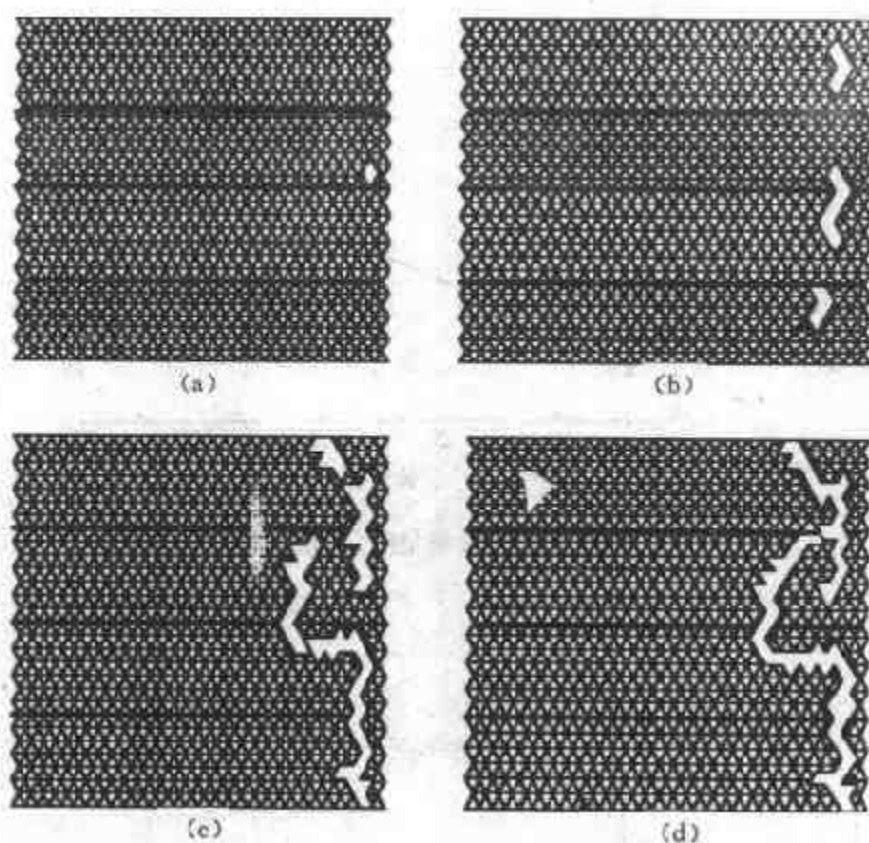


图 9.22 短纤维复合材料断裂过程模拟结果^[26]
 (a) 外加应变 $\epsilon = 1.02\%$; (b) 非稳态情形;
 (c) 外加应变 $\epsilon = 1.25\%$; (d) 破坏前构造图

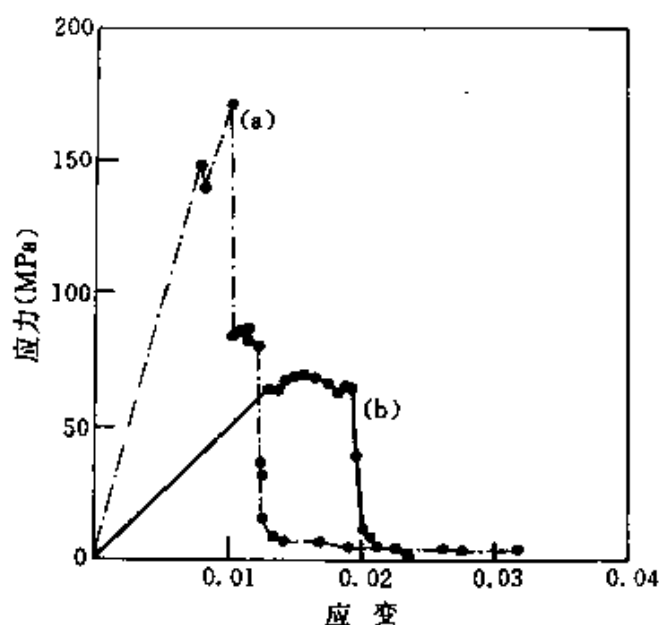


图 9.23 纤维体积含量分别为 10% (a) 及 3%^[26] (b) 情形下, 应力 - 应变曲线

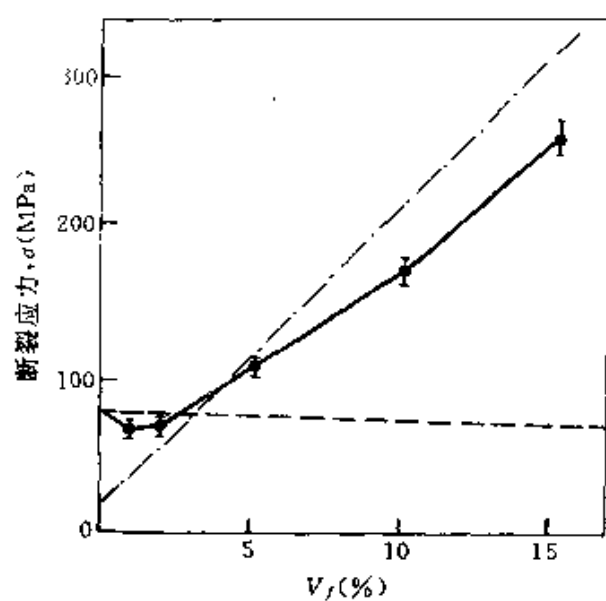


图 9.24 复合材料平均断裂应力随纤维体积含量变化曲线^[26]

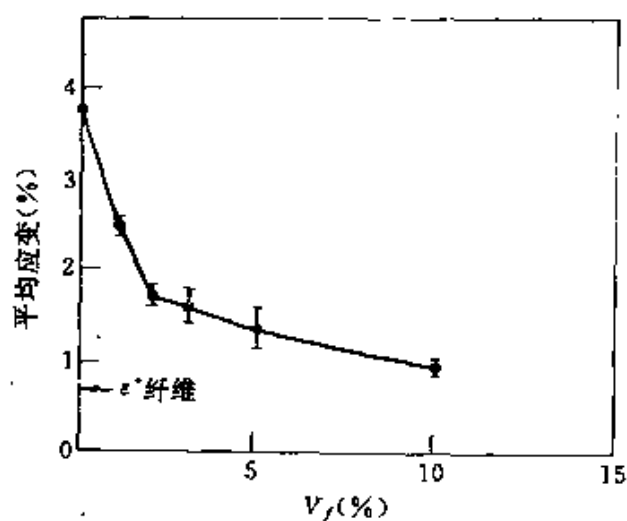


图 9.25 复合材料破坏时的平均应变随纤维体积含量变化曲线^[26]

度,但这一思想远不同于经典力学的数值分析方法,这将为细观力学提供一些新的思路。

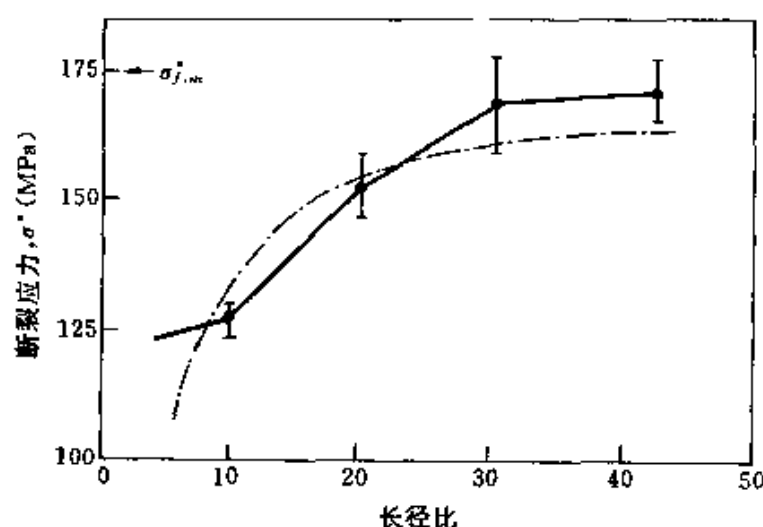


图 9.26 复合材料断裂应力随纤维长径比变化曲线^[26]

参 考 文 献

- [1] W. J. Poole, S. MacEwen, U. F. Kocks and J. D. Embury, Deformation of texture development in a model composite system, *Proceedings of ICCM-10*, Whistler, 1995, 1: 59.
- [2] R. E. Bolmaro, U. F. Kocks, F. M. Guerra, R. V. Browning, P. R. Dawson, S. P. Embury and W. J. Poole, On plastic strain distribution and texture development in fiber composites, *Acta Metall. Mater.*, 1993, 41, 1893—1905.
- [3] W. J. Poole, J. D. Embury, S. MacEwen and U. F. Kocks, Large strain deformation of a copper-tungsten composite system I, Strain distribution, *Phil. Mag.*, 1994, A69: 645—665.
- [4] R. L. Foye, Inelastic micromechanics of curing stress in composites, In: *Inelastic behavior of composite materials*, 1975, ASME winter Annual Meeting, AMD, Vol. 13.
- [5] C. W. Bert, Micromechanics of different elastic behavior of filamentary composites, In: *Tension and compression in mechanics of bimodulus materials*. ASME Winter Annual Meeting, 1979: 17.
- [6] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *ASME J. Appl. Mech.* 1945, 12: A69—A77.
- [7] R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *ASME J. Appl. Mech.*, 1951, 18: A31.
- [8] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too, Reduced integration techniques in general analysis of plates and shell, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1971, 3: 275—

- [9] S. E. Pawsey and R. W. Clough, Improved numerical integration of thick shell finite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.* , 1971, **3**: 545—586.
- [10] S. W. Lee and T. H. Pian, Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations, *AIAA J.* , 1978, **16**: 29—34.
- [11] J. N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates, *ASME J. Appl. Mech.* , 1984, **51**: 745—752.
- [12] N. S. Putcha and J. N. Reddy, A mixed Shear flexible finite element based on a refined theory of laminated plates, *Res. Rep. No. VPI-E-84. 13*, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, 1984.
- [13] B. N. Pandya and T. Kant, A refined higher-order generally orthotropic C^0 plate bending element, *Comput. Struct.* , 1982, **11**: 177—183.
- [14] K. H. Lo, R. M. Christensen and E. M. Wu, A higher-order theory of plate deformation, part I: Homogeneous plates, *ASME J. Appl. Mech.* , 1977, **44**: 663—668.
- [15] K. H. Lo, R. M. Christensen and E. M. Wu, A higher-order theory of plate deformation, part II: Laminated plates, *ASME J. Appl. Mech.* , 1977, **44**: 669—676.
- [16] E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation, *Int. J. Solids Structures* , 1975, **11**: 569—573.
- [17] T. Kant, D. R. J. Owen and O. C. Zienkiewicz, A refined higher-order C^0 plate bending element, *Comput. Struct.* , 1982, **15**: 177—183.
- [18] G. Prathap and B. R. Somashekar, A field-consistent 8-noded laminated anisotropic plate element, *Proc. Int. Conf. Com. Mat. and Struct.* , Madras, 1988.
- [19] H. V. Lakshminarayana and T. S. Ramani, On improving the performance of a shear-flexible triangular laminated composite plate finite element, *Ibid.*
- [20] A. Tessler, An improved higher-order theory for orthotropic plate, *Proc. Rev. Mech. Comp.* , Bal Harbour, Florida, 1988.
- [21] N. S. Putcha and J. N. Reddy, A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates, *Comput. Struct.* , 1983, **22**(4): 529—538.
- [22] K. Goda and S. L. Phoenix, Reliability approach to the tensile strength of unidirectional CFRP Composites by Monte-Carlo simulation in a shear-lag model, *Comp. Sci. Tech.* , 1994, **50**: 457—468.
- [23] G. Frantziskonis, On scaling phenomena in fracture of heterogeneous solids, *Eur. J. Mech.* , A/Solids, 1994, **13**: 73.
- [24] H. J. Herrmann and S. Roux, eds., Statistical models for the fracture of disordered media, North-Holland, 1990.
- [25] E. Schlangen and J. G. M. VanMier, Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures, *Mater. Struct.* , 1992, **25**: 534.

- [26] M. Murat, M. Anholt and H. D. Wagner, Fracture behavior of short-fiber reinforced materials, *J. Mat. Res.* , 1992, 7; 3120.

第十章 复合材料细观实验技术

复合材料的细观力学模型需要建立在实验观察及测量的基础上,而模型是否正确也需要利用实验来验证。近年来,随着复合材料细观力学的研究深入,细观实验技术也得到了很大的发展,尤其是针对界面性能的实验测试技术发展最为迅速。在本章中,我们将就复合材料中的纤维等组分性能的实验测试方法,纤维与基体之间界面性能的实验测试技术,以及复合材料层合板的层间断裂韧性的测量方法等内容进行扼要的介绍。

§ 10.1 单根纤维强度分布的实验测试技术

由于纤维的强度性能直接制约着由其组成的复合材料强度性能。因此,为了应用不同的纤维制备复合材料构件,必须首先了解单根纤维的强度性能。据前文所述,纤维的强度可以认为是服从 Weibull 分布的随机变量,即

$$F(\sigma) = 1 - \exp[-L(\sigma/\sigma_0)^m] \quad (10.1)$$

式中, L 为纤维的长度, m, σ_0 被称为 Weibull 分布参数。单根纤维强度分布实验测试的目的是为了确定参数 m 及 σ_0 。为了达到这一目的,可以采用两种方法,一是针对几组具有不同长度的单根纤维进行实验测量,并利用(10.1)式在双对数坐标纸上决定 Weibull 分布参数。另一种方法是对由相同纤维构成的纤维束的刚度及强度性能进行实验测试,再利用纤维束强度同纤维强度之间的关系求得 Weibull 分布参数。图 10.1 中绘出有涂层(厚为 50nm) T300-B₄C 及无涂层 T300 的碳纤维单根实验测试结果^[1], 纤维长度为 30mm, 直径为 7 μ m, 其纤维的平均强度可由下式求得

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 L^{-1/m} \Gamma(1 + 1/m) \quad (10.2)$$

两种纤维实验测试结果如表 10.1 所示。

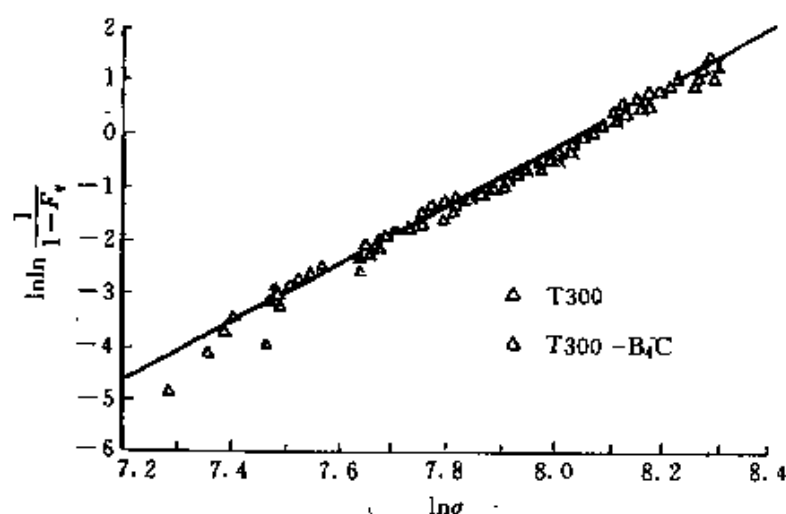


图 10.1 单根纤维拉伸试验测得的强度分布^[1]

表 10.1 单根纤维试验测得的 Weibull 分布参数^[1]

纤维	纤维长度 (mm)	测试数目	m	$\langle \sigma \rangle$ (Mpa)
T300	30	100	5,5	2950
	60	50	7,6	2700
T300-B ₄ C	30	50	5,4	2930
	60	50	3,7	2750

Manders 及 Chou^[2]和 Chi 等人^[3], R'Mili 及 Merle^[1]首先测得了碳纤维束的强度性能,而后求得了纤维的 Weibull 分布参数。Evans 等人^[4]及 Cowking 等人^[5]利用相近的方法得到了玻璃纤维的强度分布性能。

如果假设未断裂的纤维分担相同的载荷,当外加应变场为 ϵ 时,纤维束所承担的总载荷为

$$P = ANE_f \epsilon \exp[-(\epsilon/\epsilon_L)^m] \quad (10.3)$$

式中, A 为纤维横截面积, N 为初始承载的纤维总数, E_f 为纤维拉伸模量。(10.3) 式称为纤维束的载荷-应变曲线,其实验测量值如图 10.2 所示。

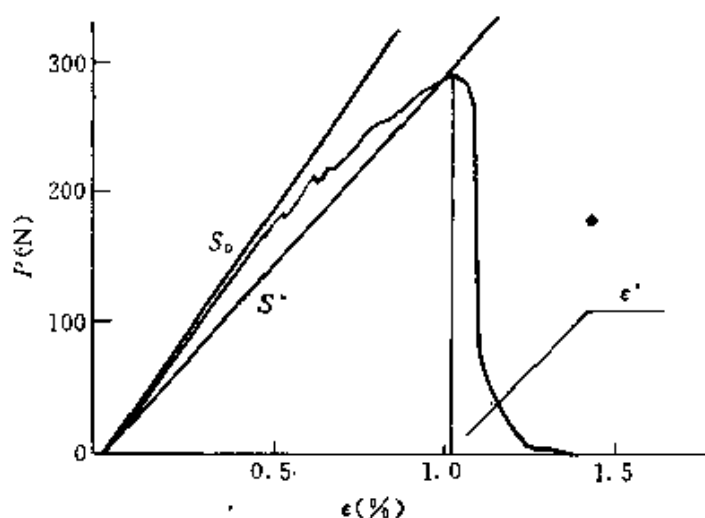


图 10.2 典型纤维束载荷-应变曲线

初始承载的纤维数 N 可能不等同于纤维总数, 应由纤维束的初始模量 S_0 确定, 为

$$N = S_0 / AE_f \quad (10.4)$$

Weibull 形状参数 m 可由 S_0 及由原点连接 P - ϵ 曲线最大载荷点的斜率 S^* 得到, 为

$$1/m = \ln(S_0/S^*) \quad (10.5)$$

纤维的平均强度由下式确定

$$\langle \sigma \rangle = P^* (2.72m)^{1/m} \Gamma(1 + 1/m) / NA \quad (10.6)$$

表 10.2 纤维束实验中测得的 Weibull 分布参数^[1]

纤维	N_1	纤维长度 (mm)	测试数目	m	$\langle \sigma \rangle$ (MPa)	ϵ^* (%)	ϵ_0 (%)
T300	4250 (350)	30	10	4.4 (0.6)	2860 (220)	1.00 (0.06)	0.51 (0.07)
	4440 (430)	60	4	3.0 (0.6)	2630 (150)	0.93 (0.05)	0.44 (0.05)
T300-B ₄ C	3600 (470)	30	8	3.1 (0.6)	2600 (270)	0.91 (0.09)	0.37 (0.07)
	3710 (90)	60	4	2.4 (0.3)	2510 (180)	0.89 (0.07)	0.34 (0.02)

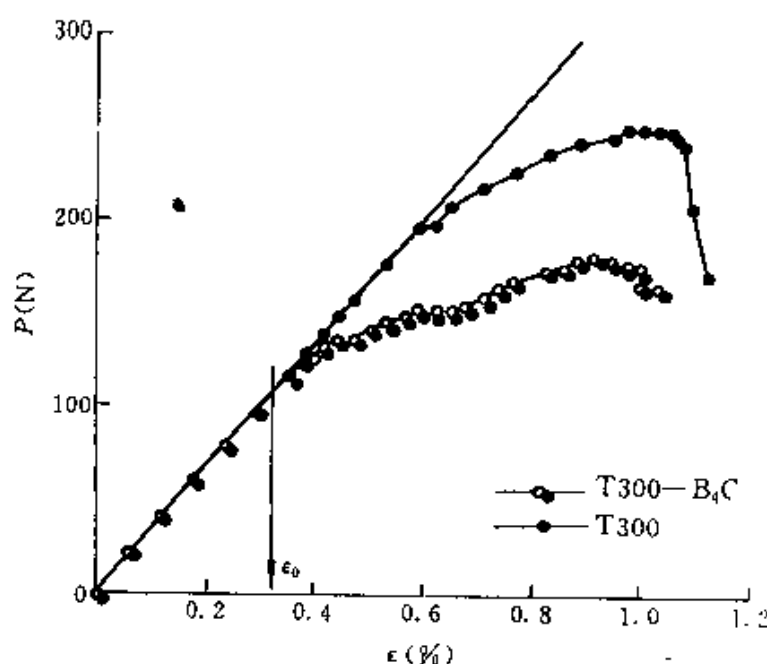


图 10.3 T300及 T300-B₄C 纤维束 P - ϵ 曲线^[1]。

从上面的讨论中可以发现,利用纤维束来测定纤维的强度性能,必须首先测得纤维束的杨氏模量,然后,再利用如图10.2所示的载荷-应变曲线可以达到目的。针对由上述两种类型纤维构成的纤维束所测得的试验结果如表10.2所示。其载荷-应变曲线如图10.3所示。

从单根纤维及纤维束的两种测试结果可以看出,两种实验得到的平均强度值比较接近。

§ 10.2 纤维与基体界面性能测试技术

纤维与基体的界面强度是影响复合材料宏观性能的重要参数。界面如果太弱,纤维的增强作用无法得以充分发挥,而导致复合材料的强度较低,而如果界面太强,复合材料的抗损伤性能较弱,导致其断裂韧性的下降。由于界面强度具有如此重要的意义,人们进行了大量的研究,以便能够定量地测量纤维与基体之间的

界面性能^[1-9]。目前比较通用的实验测试方法有埋藏纤维拔出方法(pull-out),压头顶出方法(push-out),及单根纤维碎断测量方法。下面将具体介绍这三类主要实验技术。

§ 10.2.1 压头顶出方法

压头顶出方法是将单向纤维增强复合材料沿纤维方向制成极薄的试片。不同形状及尺寸的压头将直接作用于纤维或纤维束的断面,将其顶出,并直接测量压头压力与位移之间的关系,据此,求得界面剪切强度等参数。目前,这种实验技术已经得到了广泛的采用,并且已经有商业化整套实验设备可供使用。

根据文献[5]报导,为了做单根纤维的顶出实验,压头直径可以控制在 $0.5\mu\text{m}$,这样,可以直接作用在直径约为 $10\mu\text{m}$ 的纤维横截面的中点。其试样制备过程及压头形状如图 10.4 所示。

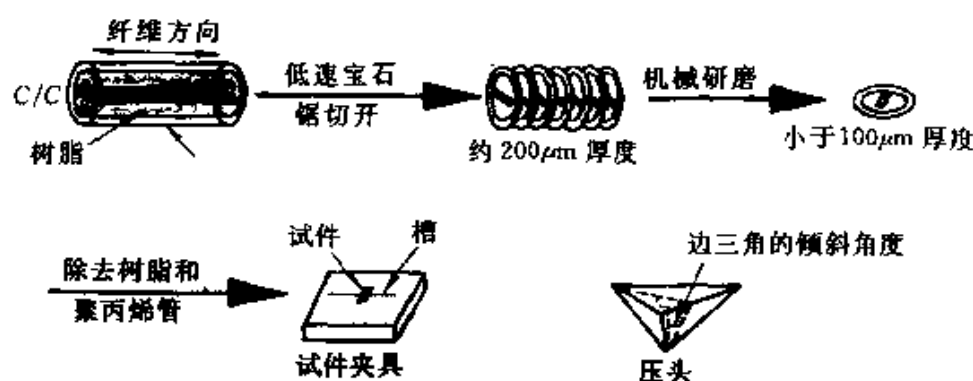


图 10.4 纤维顶出试样制备

所采用的材料为单向碳/碳复合材料。首先利用树脂将碳/碳复合材料试件固定在丙烯酸管的中心。然后再利用低速宝石锯垂直于纤维方向切成厚度大约为 $200\mu\text{m}$ 的薄片,然后,将切片磨成厚度小于 $100\mu\text{m}$ 的试片,再除去周围包裹的树脂及丙烯酸材料,将试片夹持于试件槽中。将压头直接作用于某一纤维横截面的中心位置,并施加压力(图 10.5),可以得到载荷-位移曲线(图 10.6)。

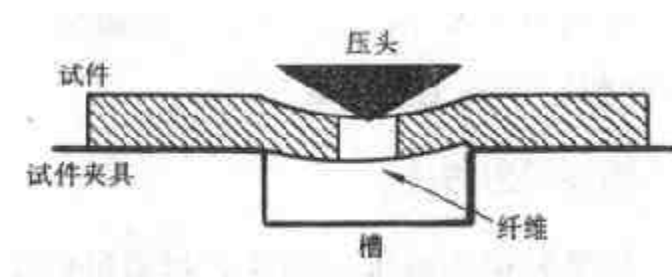


图 10.5 顶出试验示意图

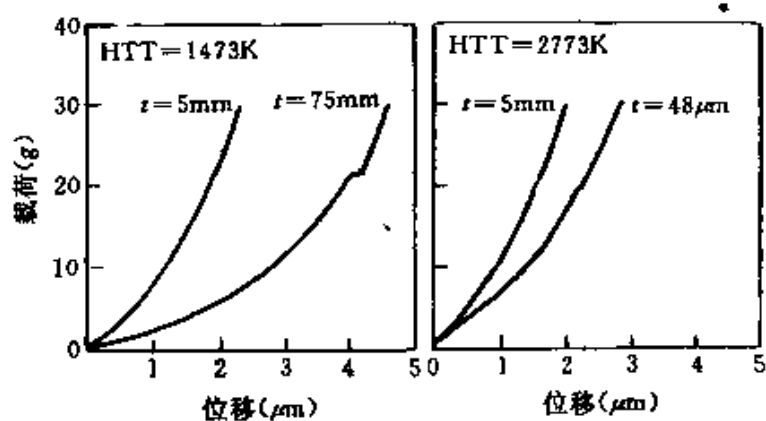


图 10.6 不同热处理工艺及不同厚度试样载荷-位移曲线

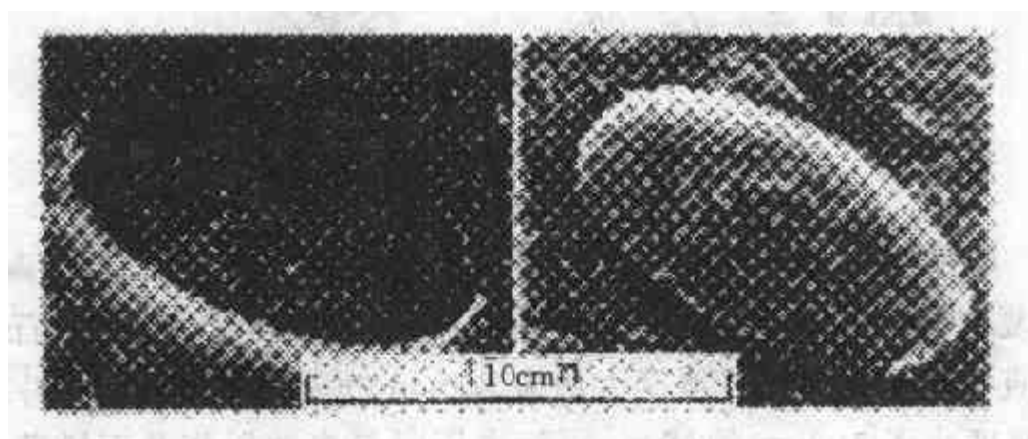


图 10.7 顶入及顶出纤维 SEM 照片

如果试片足够薄，实验中不仅可以观察到，纤维被顶入的现

象,还可以观察到在另一侧纤维被顶出的现象,如图 10.7。

对于试样很薄的情况,载荷-位移曲线存在一平台,其极限载荷为 P ,则纤维与基体界面剪切强度为

$$\tau_s = P/\pi Dt \quad (10.7)$$

式中, D 为纤维直径, t 为试片厚度。

哈尔滨工业大学张志谦、黄玉东等人研制成功的纤维束顶出界面力学性能测试仪,可以研究一束纤维与基体之间界面结合强度。这样,即使压头尺寸比较大也可以满足要求。

§ 10.2.2 埋藏纤维拔出方法(pull-out)

埋藏纤维拔出方法是界面强度的直接测量方法。主要是通过测量单根纤维从其固化树脂中的拉脱力来确定纤维与基体之间的界面强度。

$$\tau_s = \frac{F_{\max}}{A} = \frac{F_{\max} \cdot d}{\pi l} \quad (10.8)$$

式中, $F_{\max}$ 为最大拉脱力, A 为边界层面积, d 为纤维直径, l 为埋藏的纤维长度。单根纤维拔出方法的主要困难在于,必须具有特殊的微力施加设备。为了克服这一困难,Michaeli 及 Kocker 等^[6] 采用纤维束拔出测量方法,也基本达到了测量界面强度的目的。

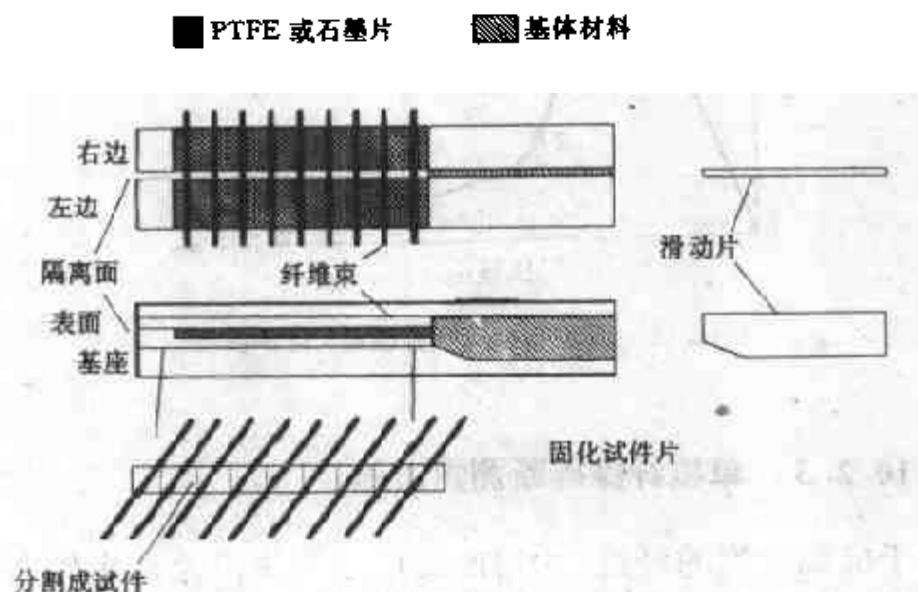


图 10.8 用于拔出试验的纤维束试样制备

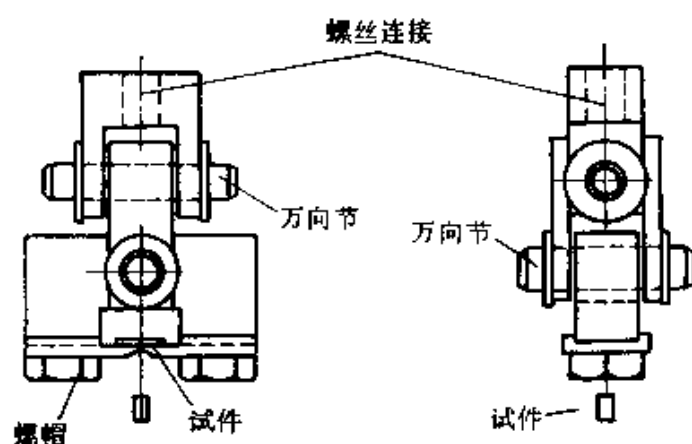


图 10.9 纤维束拔出试验试件夹具

其试件的制备过程如图 10.8 所示。在模具中,将 9 根纤维束铺设好并注入树脂固化,然后取出试样。

将试样夹持于纤维束强度测量设备中(图 10.9),在上部将纤维缠绕于一滚轴上加载,下端缺口将固定固化在纤维束上的基体,其测量得到的力-位移曲线如图 10.10 所示。同单根纤维测得的结果在形状上完全一样,进行相应的数据处理可以求得纤维与基体之间界面强度。

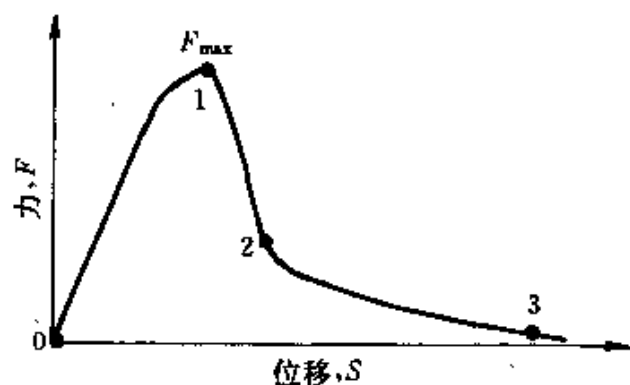


图 10.10 纤维束拔出试验载荷-位移曲线

§ 10.2.3 单根纤维碎断测量方法

对于极细较脆的纤维,利用前文所述的拔出及顶出界面性能测量方法都是比较困难的。而如果采用单根纤维碎断测量方法却

是比较容易实现的。实验方案如下：大约 1cm 长的单纤维固化在哑铃形试件中(图 10.11)，当试件在单向拉伸载荷作用下，纤维可能会产生碎断(图 10.12)。从第三章中讨论的内容知道，纤维中应力分布如图 10.12 所示。

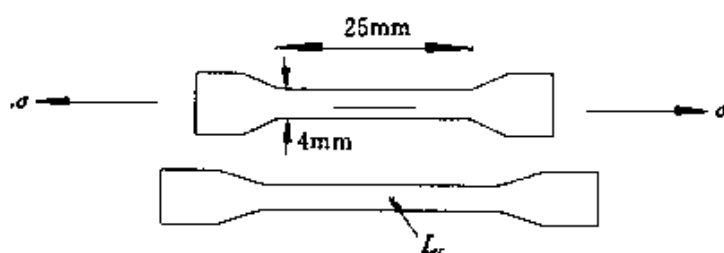


图 10.11 单根纤维复合材料哑铃型试件

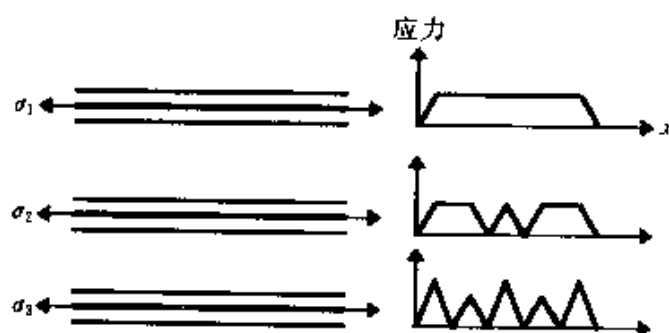


图 10.12 沿纤维轴向应力分布

由于纤维的断裂应变远小于基体的断裂应变，在拉伸载荷的作用下，纤维将在较弱的断面处断裂。随着载荷的增加，这一断裂过程将继续直至纤维段的长度较短，其表面作用的剪应力不可能积累至使纤维段发生断裂的应力。这时，最大的纤维段长度为 L_c ，于是界面剪切强度为

$$\tau = \frac{\sigma_f d}{2L_c} \quad (10.9)$$

式中， σ_f 为长度为 L_c 纤维段断裂应力， d 为纤维直径。由于缺陷的影响，实际上纤维碎段的长度介于 $L_c/2 \sim L_c$ 之间，其平均值为

$3/4L_c$ 。这样,通过测量纤维碎段的长度分布,可以求得纤维与基体之间界面强度。

§ 10.2.4 实验测试方案的合理性研究

基于前文所述的三种界面剪切强度测量方法得到的结果往往有很大的不同。因此,人们对实验方案的合理性提出了疑义。Marotzke 及 Hampe^[7] 利用有限元计算了纤维拔出及顶出试件中应力场的分布。经过计算发现,虽然人们目的是为了测量界面的剪切强度,但采用不同的方法,实际上测量的结果往往并不是界面的剪切强度。图 10.13 中绘出了有限元计算纤维拔出及顶入的材料

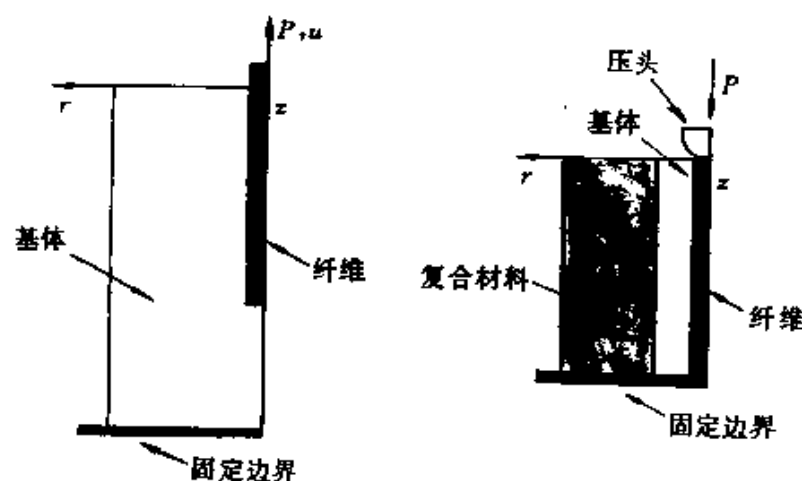


图 10.13 纤维拔出(a) 顶入(b) 试验材料模型

模型。纤维中轴向应力沿纤维方向分布如图 10.14 所示。其界面剪应力变化曲线如图 10.15 所示。界面的径向应力如图 10.16 所示。很明显,纤维与基体界面承受不同的复杂应力状态,其破坏机理也将不同,因此,实验测得的最大应力很难说代表了界面的剪切强度。

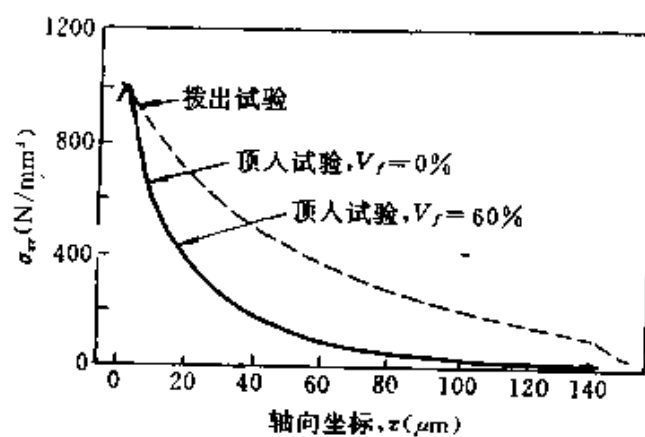


图 10.14 拔出及顶入加载方式纤维中轴向应力分布

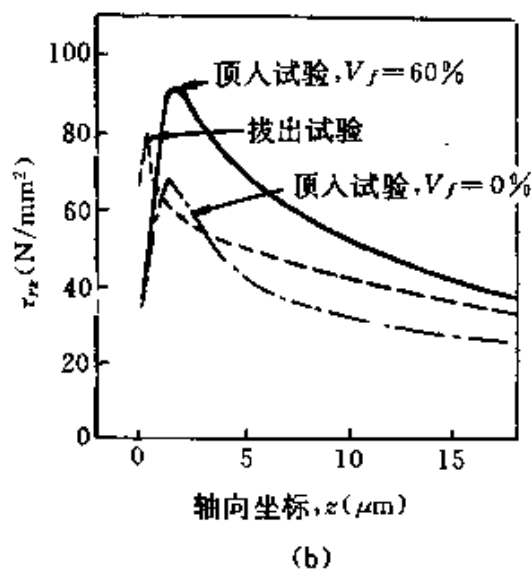
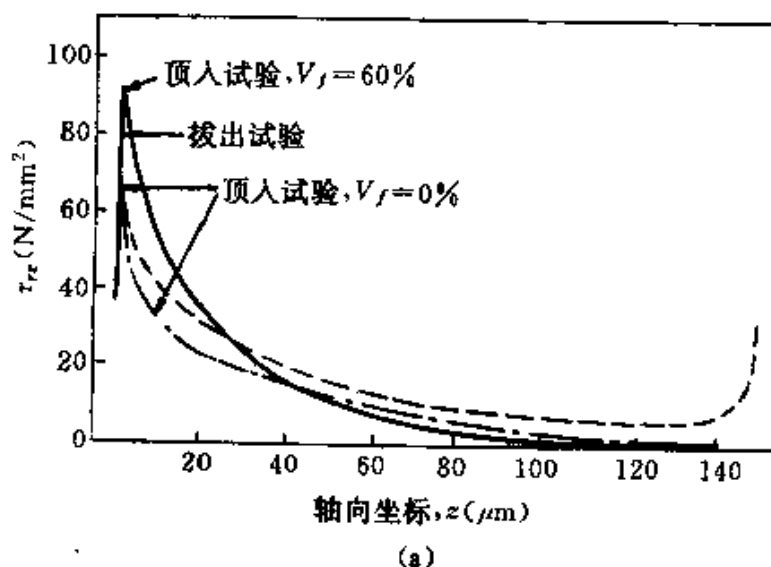


图 10.15 拔出及顶入两种加载方式界面剪应力分布

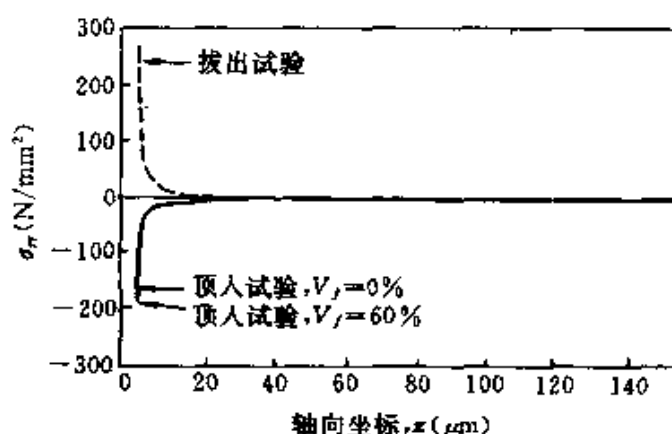


图 10.16 拔出及顶入两种加载方式界面径向应力分布

§ 10.3 复合材料层合板层间断裂韧性测定方法

正如我们前几章叙述的那样,脱层损伤是复合材料层合板的主要破坏模式。为了正确评价含有脱层缺陷的复合材料层合板的性能,必须首先测得不同复合材料层合板的层间断裂韧性。根据复合材料结构的不同受载方式,需要测定的断裂韧性有张开型(I型)裂纹,滑移型(II型)裂纹及混合型受载方式。目前,测定张开型及滑移型断裂韧性,在美国(ASTM D5528),欧洲(ESIS Protocol)及日本(JIS K7086)已经有相应的标准。对于混合型受载方式,人们目前也正在寻找可靠的实验方法。测定I型脱层的断裂韧性,目前最通用的方法是双悬臂梁(DCB)弯曲试验方法。而测定纯II型脱层断裂韧性的方法主要是单边缺口挠曲(ENF)试验方法。测定混合型的实验方法目前比较多。如下,我们将较为详尽地介绍比较有代表性的实验方法。

§ 10.3.1 双悬臂梁(DCB)弯曲实验方法

双悬臂梁弯曲实验方法主要用于测定单向 θ/θ ,或 $\theta/-\theta$ 两层

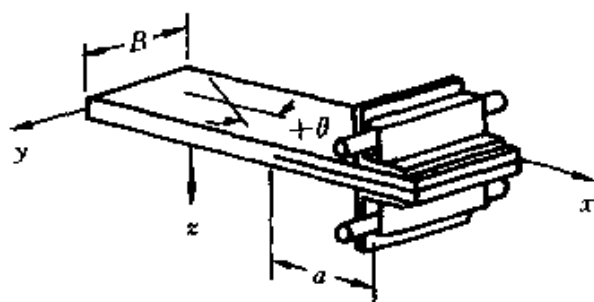


图 10.17 双悬臂梁试件

之间 I 型断裂韧性,试件几何结构如图 10.17 所示。

所采用的材料为碳 / 环氧,材料性能及结构如图 10.17 所示。试件的宽度为 2.54cm,含有厚度为 12.7 μ m,长为 5.72cm 的缺口。实验可采用位移控制,速率为 0.75mm/min。首先施加一预应力,使裂纹产生一定程度的扩展,然后卸载,再加载直至载荷达到最大值 P_c ,同时记录梁的挠度 δ_c 。I 型脱层的应变能释放率临界值,也即断裂韧性为

$$G = \frac{P^2}{2B} \times \frac{\partial C}{\partial a} \quad (10.10)$$

式中, B 为试件宽度, C 为柔度,它是脱层长度的函数,根据载荷 - 挠度曲线可以求得。利用曲线拟合,可以得到

$$C = Ra^n \quad (10.11)$$

代入(10.10)式中,可以得到

$$G_{Ic} = \frac{nP_c\delta_c}{2Ba} \quad (10.12)$$

§ 10.3.2 单边切口挠曲(ENF)试验方法

单边切口挠曲试验(图10.18)是测量 I 型断裂韧性最常用的方法。

数据处理过程同双悬臂梁试验方法类似,只是需将柔度表示成裂纹尺寸 a 的三次函数

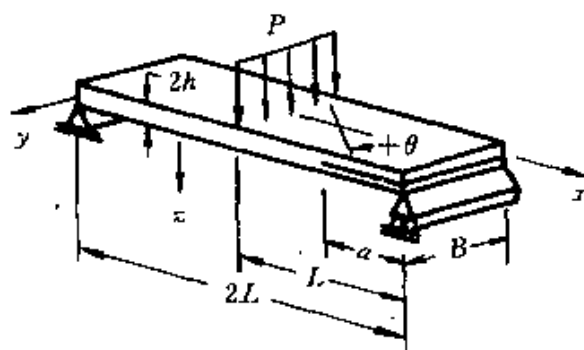


图 10.18 单边切口挠曲试件

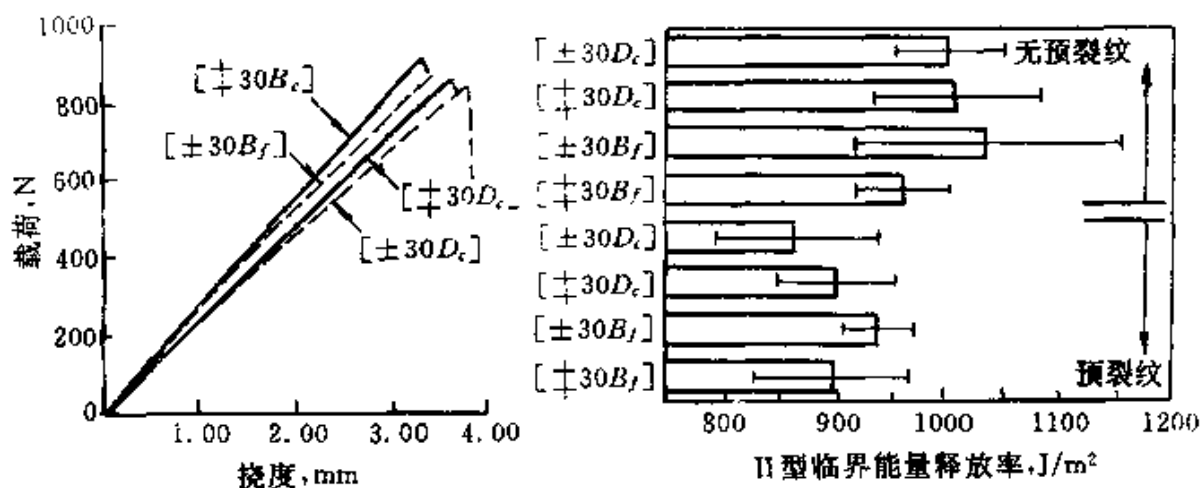


图 10.19 载荷-挠度曲线

$$C = C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + C_3 a^3 \quad (10.13)$$

其载荷-挠度试验曲线如图10.19所示。

§ 10.3.3 混合型脱层测试方法

关于混合型脱层断裂韧性的测试方法目前还没有一个比较成熟的标准。由 Reeder 及 Crew^[5,6]建立的混合模式弯曲试验结合了 I 型测试的双悬臂梁试验及 I 型测试的单边切口挠曲试验。试验方案如图10.20所示。断裂韧性为

$$G_I = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 P^2 (3C - L)^2}{b^2 h^3 L^2 E_{II}} \cdot \alpha \quad G_{II} = \frac{9}{16} \cdot \frac{a^2 P^2 (C + L)^2}{b^2 h^3 L^2 E_{II}} \beta$$

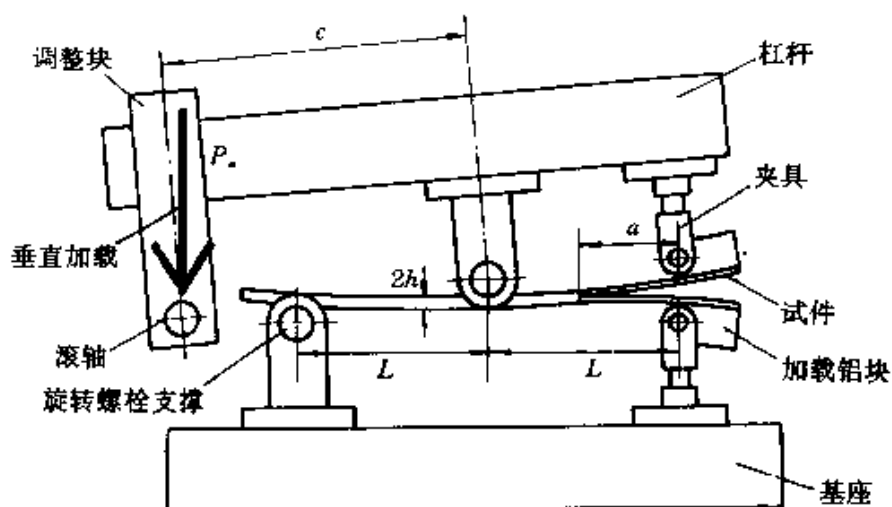


图 10.20 混合模式弯曲试验示意图

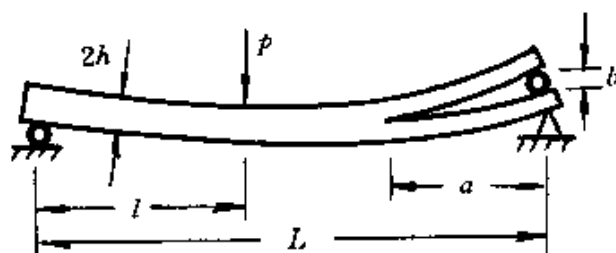


图 10.21 混合型三点挠曲试验

$$\alpha = \left[1 + \frac{2}{\lambda a} + \frac{1}{(\lambda a)^2} + \frac{1}{10} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{E_{11}}{G_{13}} \right], \beta = \left[1 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{E_{11}}{G_{13}} \right] \quad (10.14)$$

式中, a 是裂纹长度, b 为试件宽度, h 为试件厚度的一半, $2L$ 为长度, E_{11} 为纵向杨氏模量, G_{13} 是剪切模量, $\lambda = \frac{1}{h} \sqrt{6E_{22}/E_{11}}$ 。

贾普荣及矫桂琼等采用混合型挠曲分层试验方法测定了混合型断裂韧性, 其试验方案如图 10.21 所示, 其断裂韧性由下式计算,

$$G_C = G_I + G_{II}$$

$$G_I = \frac{3Eh^3\delta}{16a^4}, G_{II} = \frac{9a^2p^2}{4Eb^2h^3} \left(\frac{L_1}{L_1 + L_2} \right)^2 \quad (10.15)$$

参 考 文 献

- [1] M. Narkis and E. J. H. Chen, Review of methods for characterization of enterfacial fiber-matrix interactions, *Polymer Composites*, 1988, 9: 245—251.
- [2] C. Marotzke, Influence of the fiber length on the stress transfer from glass and carbon fibers into a thermoplastic matrix in the pull-out test, *Composite Interfaces*, 1993, 1: 153—166.
- [3] C. Marotzke, The elastic stress field arising in the single fiber pull-out test, *Comp. Sci. Tech.*, 1994, 50: 393—405.
- [4] A. S. Wimolkiatisak and J. P. Bell, Interfacial shear strength and failure modes of interphase-modified graphite-epoxy composite, *Polymer Composites*, 1989, 10: 162.
- [5] K. Hamada, S. Sato, H. Tsunakawa and A. Kohyama, Interfacial microstructure and mechanical properties of c/c Composites, Proceedings of ICCM-10, Whistler, B. C., Canada, 1995, VI-423.
- [6] W. Michael and K. Kocker, Fiber bundle pull-out test for thenmplastic matrix materials, Proceedings of ICCM-10, Whistler, B. C., Canada, 1995, VI-471.
- [7] C. Marotzke and A. Hampe, Micromechanics of the interface in polymer composites-capabilities and limitations of the common test methods, Proceedings of ICCM-10, Whistler, B. C., Canada, 1995, VI-517.
- [8] G. M. Wa, J. M. Schultz and F. N. Cogswell, Interfacial Properties of advanced thermoplastic composites; effects of treatment of carbon fibers, Proceedings of ICCM-10, Whistler, B. C., Canada, 1995, VI-557.
- [9] J. M. Park, J. H. Lee and D. J. Yoon, Interfacial Shear strength of dual basalt fibers reinforced polycarbonate composites specimners and their micro-failure mechanism using accoustic emission, Proceedings of ICCM-10, Whisher, B. C., Canada, 1995, VI-573.