

# 含缺陷的新型压电材料有效性能研究\*

## Effective Constants of Piezoelectric Composites with Defects

王彪 刘玉岚 刘金喜 杜善义

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨, 150001)

Wang Biao Liu Yulan Liu Jinxi Du Shanyi

(Harbin Institute of Technology, Harbin, 150001, China)

**摘要** 通过建立滲透模型来预报具有 3-3 联级性的压电复合材料的有效弹性、介电以及压电性能。通过这一模型,我们可以预报多孔压电介质的有效材料常数是孔隙度的幂指数函数,而且发现,当孔隙度接近其滲透门檻值时,其幂指数是不依赖于材料结构的万能常数。

**关键词** 压电复合材料 有效性能 滲透模型

**ABSTRACT** A percolation model is developed for estimating the overall elastic, piezoelectric and dielectric properties of composites with 3-3 connectivity. The model has predicted the power law dependence of the material properties on the volume fraction of piezoelectric ceramics, and the critical exponents which appear in these relations have also been obtained. By using the percolation theory, it can be expected that the predicted relations should be universal in the sense and they do not depend on the details of the microstructure provided that the volume fraction of piezoelectric ceramic is near its percolation threshold.

**KEY WORDS** piezoelectric composite, effective constants, percolation

### 1 引言

近年来,压电复合材料得到了越来越广泛的应用,这主要由于单相的压电材料往往不具备人们所需的综合材料性能。例如,压电陶瓷 PZT 家族具有较高的压电系数,但是由于它们的介电常数也较高,作为它们比值的压电电压系数往往很小,而在许多工程应用中,人们要求材料具有较高的压电电压系数。为了满足类似的要求,人们研制了许多种压电复合材料,其中,目前得到人们广泛重视的材料组合是 PZT/聚合物压电复合材料。聚合物的性能同 PZT 陶瓷相比可以视为空洞材料。通过实验可以发现<sup>[1]</sup>,材料的联级性,也即是 PZT 陶瓷及聚合物等组分相的连通方式对

材料的宏观性能影响甚大。基于含非均匀夹杂耦合弹性场及电场的解<sup>[2~4]</sup>,人们已经建立了许多模型用于预报压电复合材料的有效性能<sup>[4~6]</sup>。但这些模型一般用于一种组分相含量比较低的情况,无法考虑联级性对材料宏观性能的影响。本文根据 3-3 压电复合材料在聚合物含量较高时细观结构的特点,建立了一滲透模型用于预报压电复合材料的有效弹性、压电及介电系数。

### 2 具有 3-3 联级性的压电复合材料几何模型

具有 3-3 联级性的压电复合材料是指复合材料的两种组成相在任何一方向上均是各自联通的。对于 PZT/聚合物复合材料来说,因为聚合物的弹性性能、压电性能及介电常数均远远小于 PZT 陶瓷的性能,这样,在我们如下的计算中,均将聚合物材料当成空洞处理。当空洞含量较大时,沿某一方向观察 PZT 陶瓷所构成的骨架,可以将其简化成一准一维网络,而这一准一维网络又可分为三种组成部分。如果将空洞之间的 PZT 部分称为“键”的话,那么这三部分包括悬挂着的“键”,单路联接“键”及多路联接“键”。其中悬挂着的“键”指只有一端同准一维网络相联,另一端悬空。这种“键”不能传递载荷,却能作为电场的传播回路。单路联接“键”是指准一维网络中最关键的部分,它们仅由一个“键”保持着准一维网络的连通,它们也承担了材料的绝大部分变形及电热差。多路联接“键”是指 PZT 陶瓷较厚实部分,它们有多个“键”保持准一维网络的连通,它们的刚度及电传播回路均比单路联接“键”大得多。通过如上的分类,我们可以认为单路联接“键”承担着材料的大部分变形及电热差。为了预报材料的刚度,压电系数及介电常数,我们可以仅考虑单路联接“键”的响应。

根据滲透理论,单路联接“键”总的数目为<sup>[6]</sup>

$$N_s \sim (C_t - C_f)^{-1} \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金资助项目

式中,  $C_1, C_f$  分别为 PZT 陶瓷的体积含量及临界体积含量。~表示成比例关系。“键”的最小宽度为

$$\sigma_{min} \sim (C_1 - C_f) \quad (2)$$

“键”的长度可以取为

$$l \sim \sigma_{min}^{1/2} \sim (C_1 - C_f)^{1/2} \quad (3)$$

因此,“键”的横截面积为

$$S \sim \sigma^2 \sim (C_1 - C_f)^2 \quad (4)$$

### 3 压电复合材料的有效材料常数

根据我们上一部分的讨论,可以将 PZT/聚合物压电复合材料的宏观响应等同于联结两个表面积为  $\xi^2$  之间的准一维网络的宏观响应。其中

$$\xi \sim (C_1 - C_f)^{-1} \quad (5)$$

$\xi$  为 PZT 结构的有效长度。如果设想在上、下表面分别施加外力  $\vec{F}_0$  及极化电荷  $q_0$ , 那么,通过计算准一维网络的宏观位移及电场可以得到材料的等效弹性模量、压电系数及介电常数。

设在外场  $\vec{F}_0$  及  $q_0$  作用下,第  $i$  个单路联结“键”的弯曲角  $\Delta\theta_i$ , 轴向变形  $\Delta\mu_i$ , 电势差  $\Delta\phi_i$ , 那么,这个“键”的机械能及电能的和为

$$E_i = \frac{1}{2} A_i \Delta\theta_i^2 + \frac{1}{2} B_i \Delta\mu_i^2 + \frac{1}{2} C_i \Delta\phi_i^2 + D_i \Delta\mu_i \Delta\phi_i \quad (6)$$

式中,

$$A_i \sim \sigma_{min}^{3/2}, B_i \sim \sigma_{min}^{3/2}, C_i \sim \sigma_{min}^{3/2}, D_i \sim \sigma_{min}^{3/2} \quad (7)$$

系统的总能量为

$$E = \sum_{i=1}^{N_i} E_s = \sum_{i=1}^{N_i} \left[ \frac{1}{2} A_i \Delta\theta_i^2 + \frac{1}{2} B_i \Delta\mu_i^2 + \frac{1}{2} C_i \Delta\phi_i^2 + D_i \Delta\mu_i \Delta\phi_i \right] \quad (8)$$

系统总的势能为

$$W = E - \vec{F}_0 \cdot \vec{U} - q_0 \Phi \quad (9)$$

式中,  $\vec{U}$  为下表面固定条件下,上表面的位移。  $\Phi$  为上表面的电势。它们可以表示成

$$\vec{U} = \sum_{i=1}^{N_i} \left[ \frac{\Delta\theta_i}{B_i} \vec{z}_i + \frac{\Delta\mu_i}{L_i} \vec{l}_i \right] \quad (10)$$

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N_i} \Delta\phi_i \quad (11)$$

式中,  $\vec{z}_i$  是以第  $i$  个“键”的端点出发指向准一维网络

与上表面交点的矢量,  $\vec{z}_i$  是垂直于  $\vec{B}_i$  矢量的单位矢量。  $\vec{l}_i$  是沿第  $i$  个“键”的长度矢量。

通过确定  $W$  取最小值的条件,我们可以确定  $\Delta\theta_i, \Delta\mu_i$  及  $\Delta\phi_i$  的值

$$\Delta\theta_i = A_i^{-1} F_0 \cdot \left| \frac{\vec{z}_i}{B_i} \right| \sin\alpha_i \quad (12)$$

$$\Delta\mu_i = (B_i C_i - D_i^2)^{-1} (C_i F_0 \cos\alpha_i - D_i q_0) \quad (13)$$

$$\Delta\phi_i = (B_i C_i - D_i^2)^{-1} (B_i q_0 - D_i F_0 \cos\alpha_i) \quad (14)$$

式中,  $\alpha_i$  是第  $i$  个“键”同上、下表面法线之间的夹角。

将(12)(13),及(14)式代入(8)式中,我们可以得到能量表达式

$$E = -\frac{1}{2} H F_0^2 - G F_0 q_0 + \frac{1}{2} Q q_0^2 = -\frac{1}{2} S^p / \xi \cdot (F_0 / \xi)^2 - b / \xi \cdot F_0 / \xi \cdot q_0 / \xi + \frac{1}{2} X^p / \xi \cdot (q_0 / \xi)^2 \quad (15)$$

式中,  $S^p$  为给定极化率条件下的柔度,  $b$  为压电常数,  $X^p$  为给定外力条件下的介电常数。通过比较(15)式的左右两边可以得到

$$S^p \sim (C_1 - C_f)^{-4.4} \quad (16)$$

$$b \sim (C_1 - C_f)^{-2.4} \quad (17)$$

$$X^p \sim (C_1 - C_f)^{-2.4} \quad (18)$$

在导出(16),(17)及(18)式时,我们曾用到  $r=0.9$

### 参考文献

- 1 Newnham R E. Connectivity and Piezoelectric Composites, Mat Ras Bull. 1987, 13, 325
- 2 Wang B. Three-dimensional Analysis of an Ellipsoidal Inclusion in a Piezoelectric Material. Int J Solids Structures, 1992, 29, 293
- 3 Wang B. Three-dimensional Analysis of a Flat Elliptical Crack in a piezoelectric Material. Int J Engng Sci 1992, 30 (6)
- 4 Wang B. Effective Constants of Piezoelectric Composites. ASME Applied Mechanics Review, 1994, 47(1)
- 5 Dunn M I, Taya M. Micromechanics Predictions of the Effective Electroelastic Moduli of Piezoelectric Composites. Int. J Solids and Structures, 30(6)
- 6 Stauffer D. Introduction to Percolation Theory. Taylor Francis, London, 1983