DOI:10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.1989.03.001

第10卷 第3期 固体力学学报 Vol.10 №3
1989年9月 ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA September 1989

含有随机夹杂的统计非均匀弹性介质参数的分析

王彪 王殿富 王铎

(清华大学) (哈尔滨工业大学)

提要 本文提出了随机点场理论用于研究含有随机夹杂的统计非均匀介质。本文不同于其它作者,一般均将随机理论建立在Eshelby的等效夹杂原理之上,而这里是建立在Kunin的微结构理论基础之上。作为理论的一个应用,本文对复合材料的有效模量及夹杂内部及周围微观场进行了计算。

关键词 统计非均匀介质,随机点场理论,有效弹性模量,微观场。

一、引 言

对于由数种材料组成的非均匀介质的研究,近年来已吸引了更多的科学工作者。其研究的目的已不仅限于寻求材料宏观表现的有效系数问题,而且最近人们也越来越感兴趣于微观场水平的估计。对于弹性介质的力学性能方面的微结构理论,可以进行这样简单的回顾。Kröner[1]等对于多晶体问题进行了较为系统的研究。Budiansky[2]及Horii[3]等应用 Self-Consistent 方法研究了随机多裂纹体的有效弹性模量问题。文[4]中结合Eshelby[5]的单体夹杂问题的解答,给出了单向排列椭球形夹杂的微观应力场的近似计算结果。至今,仍有大量工作研究含规则排列的夹杂及缺陷材料的有效参量及微观场问题。

从上面的研究可以发现,作为研究的对象集中为两种,一种是宏观统计均匀介质,另一种是非随机介质,作为统计均匀介质,最方便的条件是人们可以利用各态历经性假设。但对于实际材料,这两类模型不足以精确地描述材料。尤其随着材料的可设计性增加,更是如此。

此外,人们对于微观场的研究,一般都基于 Eshelby 的等效夹杂原理,这样做的优点是使问题变得简单,但缺乏统一性,而本文的做法是应用积分方程的技术,对所有类似的问题(如温度场等)都能给予统一的描述,而且处理同样问题同 Eshelby 方法相比,

本文于1987年6月23日收到。

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n

不增加解题难度。

本文将随机点过程的理论推广到三维空间，认为夹杂的中心形成一随机点场。摒弃各态历经性假设，指出了处理任意夹杂介质的一般方法。使得从理论上计算多点相关函数成为可能。还初步得到了这样一些结论。当夹杂中心形成一齐次泊松点场时，可以得到同各态历经性假设一样的结论，这即是统计同性介质的物理背景。本文还在球形夹杂情况下、应用 Self-Consistent 方法及本文的方法，计算了宏观弹性模量及微观场，并进行了比较。

二、基本理论

以位移表示的非均匀体弹性力学基本方程为

$$\partial_j c_{ijkl}(\vec{x})\partial_k u_l = -q_i \tag{1}$$

式中，$c_{ijkl}(\vec{x})$为非均匀体的弹性模量张量，以算子形式表示方程(1)为

$$\nabla c(\vec{x})\nabla u = -q \tag{1}'$$

将(1)式中$c_{ijkl}(\vec{x})$分解为

$$c_{ijkl}(\vec{x}) = c^0_{ijkl} + c^1_{ijkl}(\vec{x}) \tag{2}$$

式中，c^0_{ijkl}为常量弹性模量张量，对于夹杂问题可取基体的弹性模量张量。相应的算子方程为

$$\nabla c_0 \nabla u + \nabla c_1(\vec{x})\nabla u = -q \tag{3}$$

重新将(3)式写成

$$\nabla c_0 \nabla u = -q - \nabla c_1(\vec{x})\nabla u \tag{4}$$

从(4)式，我们可以发现，通过弹性模量张量的分解，已经将非均匀体问题转化成了体积力问题。如果$c_1(\vec{x})$为分区连续函数(如对于夹杂问题)，那么，可以将(4)式理解为广义函数式，其解自动满足夹杂界面位移及正应力连续的边界条件。

设对于均匀基体介质c_0的格林算子为G_0。对于无限大同性介质而言，G_0即为Kelvin解，方程(4)两边同时作用算子G_0，得关于位移u的积分——微分方程

$$u = u_0 + G\nabla c_1 \nabla u \tag{5}$$

式中，u_0为外载在均匀介质c_0中产生的位移场。

应用算子def于方程(5)的两边，使得$\varepsilon = \mathrm{def}u$，并考虑到$c_1$的对称性及$G_0$在无穷远处核为零的事实，得

$$\varepsilon + K_0 c_1 \varepsilon = \varepsilon_0 \tag{6}$$

式中，$\varepsilon_0 = \mathrm{def}u_0$为外力在均匀介质中产生的应变场。

$$K_0 = -\mathrm{def}G_0\mathrm{def} \tag{7}$$

其核为四阶张量

$$K^0_{ijkl} = -(\partial_i\partial_l G_{jk})_{(ik)(jl)} = -\frac{1}{4}(\partial_i\partial_l G_{jk} + \partial_j\partial_l G_{ik} + \partial_i\partial_k G_{jl} + \partial_j\partial_k G_{il}) \tag{8}$$

同理，关于应力场的算子方程为($\sigma = c\varepsilon$，$\sigma_0 = c_0\varepsilon_0$)

$$\sigma + S_0 B_1 \sigma = \sigma_0 \tag{9}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

式中，$S_0=c_0-c_0K_0c_0$，弹性柔度张量$B(x)=B_0+B_1(\vec{x})$，且$B(\vec{x})=c^{-1}(\vec{x})$，$B_0=c_0^{-1}$。方程(6)及方程(9)可以认为是非均匀体的基本方程，其中算子K_0，S_0可以认为是关于应变及应力的格林函数。对于夹杂问题，弹性模量$c_1(\vec{x})$及柔度张量$B_1(\vec{x})$为分区连续函数。下面本文主要处理这类问题。

如果非均匀体是由多相材料组成，弹性模量张量可表示为分区连续函数

$$C_{ijkl}(\vec{x})=C^0_{ijkl}+\sum_{m=1}^{N}C^m_{ijkl}v_m(\vec{x}) \tag{10}$$

式中，令Ω为夹杂所在区域，$\overline{\Omega}$为其余区域

$$v_m(\vec{x})=\begin{cases}1 & \vec{x}\in\Omega\\ 0 & \vec{x}\in\overline{\Omega}\end{cases} \tag{11}$$

同理，弹性柔度张量可表示为

$$B_{ijkl}(\vec{x})=B^0_{ijkl}+\sum_{m=1}^{N}B^m_{ijkl}v_m(\vec{x}) \tag{12}$$

如果所有夹杂都是同种材料，则C^m_{ijkl}及B^m_{ijkl}都是常量，

$$C^m_{ijkl}=L_{ijkl},\quad B^m_{ijkl}=P_{ijkl} \tag{13}$$

将(10)式、(12)式及(13)式分别代入方程(6)式及(9)式中，得

$$\varepsilon=\varepsilon_0-\sum_{m=1}^{N}K_0L\varepsilon v_m(\vec{x}) \tag{14}$$

$$\sigma=\sigma_0-\sum_{m=1}^{N}S_0P\sigma v_m(\vec{x}) \tag{15}$$

当夹杂为空洞时，我们可以对(14)和(15)式进行极限处理。

$$C^m_{ijkl}\longrightarrow -C^0_{ijkl},\qquad B^m_{ijkl}\longrightarrow\infty\ (\vec{x}\in\Omega) \tag{16}$$

故(14)及(15)式成为

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\sum_{m=1}^{N}K_0C^0v_m(\vec{x})\ \varepsilon^+ \tag{17}$$

$$\sigma=\sigma_0-\sum_{m=1}^{N}S_0\varepsilon^+v_m(\vec{x}) \tag{18}$$

式中，ε^+为空洞内部应变场。(14)及(15)式或(17)及(18)式总可以写成通式为

$$A(\vec{x})=A_0+\sum_{m}A'(\vec{x}-\vec{r}_m;\ \phi_m) \tag{19}$$

式中，A_0为确定性的常量场，对于无限大体含有无数夹杂的问题，任一点处的应力场或应变场仅同这点与夹杂的中心位置的相对距离相关。因此(19)式中，本文将摄动项表示成$\vec{x}-\vec{r}_m$的函数，其中$\vec{r}_m$为第m个夹杂的中心位置，ϕ_m表示第m个夹杂的尺寸、方位等随机变量。为了方便，在下面本文统称为标值。

从(19)式可以发现，由于夹杂的中心位置$\vec{r}_m$及标值ϕ_m为随机变量，这样张量A为

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n

一随机场量，为了求得A的统计特征量，下面我们引入随机点场理论来处理。

假设：

1）所有夹杂的中心位置可用一泊松点场来描述；其定义见附录。

2）夹杂的形状、方位、尺寸等随机量作为随机点场的标值，它们与夹杂的位置统计独立；

3）所有夹杂的标值都有相同的分布函数。

为了问题的处理方便，我们将(19)式写成

$$A_{ij}(\vec{x}) = A^0_{ij} + \overline{A}_{ij} \tag{20}$$

式中，$\overline{A}_{ij} = \sum_m A'(\vec{x} - \vec{r}_m; \phi_m)$，从(20)式可知，$A^0_{ij}$为非随机常量部分，因此下文，主要讨论$\overline{A}_{ij}$项的统计特征。

为求得任一点$\vec{x}$处随机场量$\overline{A}_{ij}$的各阶矩，引入关于$\overline{A}_{ij}$的特征函数$M_{\overline{A}}$的定义

$$M_{\overline{A}} \triangleq E[\exp(I\alpha_{ij}\overline{A}_{ij})] \tag{21}$$

式中，$E[\cdot]$表示取均值，α_{ij}为一常张量，括号内对相同的角标求和，I为复数单位。(21)式的具体计算式可推导如下。将$\overline{A}_{ij}$表达式代入(21)式中

$$M_{\overline{A}} = E\left\{\exp\left[I\alpha_{ij}\sum_{m=1}^{N_v} A'_{ij}(\vec{x} - \vec{r}_m; \phi_m)\right]\right\} \tag{22}$$

利用条件期望的性质可以得到

$$M_{\overline{A}} = P_r(N_v = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P_r(N_v = n)\, E\left\{\exp\left[I\sum_{m=1}^{n}\alpha_{ij}A'_{ij}\right] \mid N_v = n\right\} \tag{23}$$

式中，$P_r(N_v = n)$表示体积为v内，夹杂数目为n时的概率。大括号中项为关于$\vec{r}_m$及ϕ_m的函数取条件均值。

由附录(*A*.8)式关于泊松点位置分布的密度函数及其独立性可以得到

$$E\left\{\exp\left[I\sum_{m=1}^{n}\alpha_{ij}A'_{ij}(\vec{x} - \vec{r}_m; \phi_m)\right] \mid N_v = n\right\}$$

$$= \left\{\left(\iiint_v \lambda dv\right)^{-1}\iiint_v \lambda E\{\exp[I\alpha_{ij}A'_{ij}(\vec{x} - \vec{r}_m; \phi_m)]\}dv(\vec{r}_m)\right\}^n \tag{24}$$

将附录(*A*.1)及(24)式代入(23)式中，就能得$\vec{x}$处$\overline{A}$张量的特征函数表达式

$$M_{\overline{A}} = \exp\left\{\iiint_v \lambda E[\exp(I\alpha_{ij}A'_{ij}) - 1]dv\right\} \tag{25}$$

设r_n是随机场量$\overline{A}_{ij}(\vec{x})$的$n$阶累积量，由特征函数的性质可以得到

$$I^n r_n = (\partial^n M / \partial\alpha^n) \qquad (\alpha = 0) \tag{26}$$

式中，I——为复数单位，故

$$r^n_{ij} = \iiint_v \lambda E\left\{[A'_{ij}(\vec{x} - \vec{r}_m; \phi_m)]^n\right\}dv(\vec{r}_m) \tag{27}$$

式中，λ为泊松点场的强度函数，(27)式中的均值仅是对于标值ϕ_m求取的。$\overline{A}_{ij}$的均值及方差即为一阶矩及二阶矩

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

$$\langle \overline{A_{ij}} \rangle = \iiint_v \lambda E[A'_{ij}(\vec{x} - \vec{r}_m, \phi_m)]dv(\vec{r}_m) \tag{28}$$

$$\langle \overline{A^2_{ij}} \rangle = \iiint_v \lambda E\left\{[A'_{ij}(\vec{x} - \vec{r}_m, \phi_m)]^2\right\}dv(\vec{r}_m) \tag{29}$$

将(14)式及(15)式同(19)式比较，可以知道对于应变方程及应力方程 A'_{ij} 的具体表达式．将其代入(28)式就可求得一点处应变均值及应力均值的方程．

$$\langle \varepsilon_{ij}(\vec{x}) \rangle = \varepsilon^0_{ij} - \iiint_v \lambda(\vec{r}_m)\left[\iiint_{v_m} K^0_{ijmn}(\vec{x} - \vec{r}')L_{mnkl}\langle \varepsilon^+_{kl}(\vec{r}') \rangle dv(\vec{r}')\right]dv(\vec{r}_m) \tag{30}$$

$$\langle \sigma_{ij}(\vec{x}) \rangle = \sigma^0_{ij} - \iiint_v \lambda(\vec{r}_m)\left[\iiint_{v_m} S^0_{ijmn}(\vec{x} - \vec{r}')P_{mnkl}\langle \sigma^+_{kl}(\vec{r}') \rangle dv(\vec{r}')\right]dv(\vec{r}_m) \tag{31}$$

式中，v 表示夹杂的分布体积区域，v_m 为某一夹杂的平均体积区域，$\langle \cdot \rangle$ 表示取均值，$\sigma^+_{kl}(\vec{r}')$ 及 $\varepsilon^+_{kl}(\vec{r}')$ 分别表示夹杂内部的应力场及应变场．在得出(30)及(31)式时，本文没有考虑 v_m 的随机性，而取其均值．如果认为夹杂中心形成齐次泊松点场，即 $\lambda(\vec{r}_m) = n$(常量)，交换(30)式及(31)式中积分顺序，考虑到文[6]中结果，可以得到有效柔度张量表达式

$$B^* = B_0 - v_f B_0 L\langle \varepsilon^+ \rangle \tag{32}$$

为求得夹杂内部场及基体中的应力场及应变场，只须对夹杂的分布作如下处理．

内部场：假设 $\vec{x}$ 处存在一个夹杂

$$\lambda(\vec{r}_m) = \begin{cases} \delta(\vec{r}_m - \vec{x}) & \vec{r}_m \in v_{\vec{x}} \\ n & \vec{r}_m \in \overline{v_{\vec{x}}} \end{cases} \tag{33}$$

式中，$v_{\vec{x}}$ 是以 $\vec{x}$ 为中心的夹杂区域．将(33)式代入(30)式及(31)式中，在外部应力场给定的条件下，得

$$\langle \varepsilon^+_{ij} \rangle = \varepsilon^0_{ij} - v_f B^0_{ijmn} L_{mnkl}\langle \varepsilon^+_{kl} \rangle - (1 - v_f) A_{.jmn} L_{mnkl}\langle \varepsilon^+_{kl} \rangle \tag{34}$$

$$\langle \sigma^+_{ij} \rangle = \sigma^0_{ij} - (1 - v_f) D_{ijmn} P_{mnkl}\langle \sigma^+_{kl} \rangle \tag{35}$$

式中，对于相同的指标缩并．v_f 为体积含量．

$$A_{ijmn} = \iiint_{v_0} K^0_{ijmn}(\vec{r}')\,dv(\vec{r}') \tag{36}$$

$$D_{ijmn} = \iiint_{v_0} S^0_{ijmn}(\vec{r}')\,dv(\vec{r}') \tag{37}$$

式中，v_0 是以圆心为中心的椭球形夹杂的区域．A_{ijmn} 及 D_{ijmn} 的分量形式为

$$\begin{aligned} A_{1111} &= k_0[3I_{11} + (1 - 4\gamma_0)I_1] \\ A_{1122} &= k_0(I_{21} - I_1) \\ A_{1212} &= \frac{1}{2}k_0[I_{21} + I_{12} + (1 - 2\gamma_0)(I_1 + I_2)] \\ D_{1111} &= r_0\left[1 - \frac{1}{8\pi}(3I_{11} + I_1)\right] \end{aligned} \tag{38}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n

$$D_{1122}=r_0\left\{\frac{1-\gamma_0}{2}-\frac{1}{16\pi}[I_{21}+I_{12}-(1-4\gamma_0)(I_1+I_2)]\right\}$$

$$D_{1212}=r_0\left\{\frac{1-\gamma_0}{2}-\frac{1}{16\pi}[I_{21}+I_{12}+(1-2\gamma_0)(I_1+I_2)]\right\} \tag{39}$$

式中

$$k_0=\frac{1}{16\pi\mu_0(1-\gamma_0)},\qquad r_0=\frac{2\mu_0}{1-\gamma_0},$$

μ_0、ν_0 分别为基体剪切模量及泊松比。

$$I_p=\frac{3}{2}v\int_0^\infty\frac{d\xi}{(a_p^2+\xi)\triangle(\xi)}$$

$$I_{pq}=\frac{3}{2}va_p^2\int_0^\infty\frac{d\xi}{(a_p^2+\xi)(a_q^2+\xi)\triangle(\xi)}$$

$$(\triangle(\xi)=\sqrt{(a_1^2+\xi)(a_2^2+\xi)(a_3^2+\xi)};\ p,q=1、2、3) \tag{40}$$

式中，v 为椭球夹杂的体积，a_1、a_2、a_3 为三半轴长度。由于正交对称性，A 张量及 D 张量分别有九个独立分量，其余六个分量可由周期地替换角标 1 、 2 、 3 而得到。

外部场：假设 $\bar{x}$ 处不存在夹杂

$$\lambda(\bar{r}_m)=\begin{cases}0 & \bar{r}_m\in v_x^-\\ 1 & \bar{r}_m\in v_c^-\end{cases} \tag{41}$$

将(41)式代入(30)及(31)式中得

$$\langle\varepsilon_{ij}^-\rangle=\varepsilon_{ij}^0-v_f(B_{ijmn}^0-A_{ijm_1})\mathrm{L}_{mnkl}\langle\varepsilon_{kl}^+\rangle \tag{42}$$

$$\langle\sigma_{ij}^-\rangle=\sigma_{ij}^0+v_fD_{ijm_2}P_{mnkl}\langle\sigma_{kl}^+\rangle \tag{43}$$

(34)、(35)式及(42)、(43)式的假设是认为夹杂内部弹性场均值为常值，将(34)式代入(32)式中，我们得到了有效弹性模量具体表达式

$$B^*=B_0-v_fB_0LB\langle(I+DP)^{-1}\rangle[I-v_fD\langle(I+DP)^{-1}\rangle P]^{-1} \tag{44}$$

三、计算结果

作为一个感兴趣的问题，下面主要讨论了球形夹杂场的情况。对于球形夹杂，(38)式中 A 张量及(39)式中的 D 张量分别为

$$A_{1111}=k_0\left[\frac{12}{5}\pi+(1-4\gamma_0)\frac{4}{3}\pi\right]$$

$$A_{1122}=-\frac{8}{15}k_0\pi$$

$$A_{1212}=4\pi k_0\left(\frac{8}{15}-\frac{2}{3}\gamma_0\right) \tag{45}$$

且

$$A_{1111}=A_{2222}=A_{3333}$$

$$A_{1122}=A_{1133}=A_{2233}$$

$$A_{1212}=A_{1313}=A_{2323} \tag{46}$$

其余分量为 0。

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

$$D_{1111}=r_0(1-\frac{7}{15}\pi)$$

$$D_{1122}=r_0\left\{\gamma_0-\frac{1}{16}\left(\frac{32}{3}\gamma_0-\frac{16}{15}\right)\right\}$$

$$D_{1212}=r_0\left\{\frac{1-\gamma_0}{2}-\frac{1}{16}\left\{\frac{8}{5}+(1-2\gamma_0)\frac{8}{3}\right\}\right\} \tag{47}$$

且

$$D_{1111}=D_{2222}=D_{3333}$$
$$D_{1122}=D_{1133}=D_{2233}$$
$$D_{1212}=D_{1313}=D_{2323} \tag{48}$$

其余分量为 0。

1. 有效弹性模量计算

(1) 材料组合

$$2G_0=2000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda_0=1500\text{kg/mm}^2$$
$$2G=4000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda=3000\text{kg/mm}^2 \tag{49}$$

式中，λ 及 λ_0 分别为夹杂及基体的 Lame 常数。计算结果示于图 1 及图 2 中，虚线表示 Self-Consistens 方法计算结果。

(2) 空洞情况

$$2G_0=2000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda_0=1500\text{kg/mm}^2$$
$$2G=0.01\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda=0.01\text{kg/mm}^2 \tag{50}$$

计算结果示于图 3 及图 4 中。

2. 微观场计算

(1) 硬夹杂情况 ($E_f>E_m$)

$$2G_0=2000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda_0=1500\text{kg/mm}^2$$
$$2G=4000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda=3000\text{kg/mm}^2 \tag{51}$$

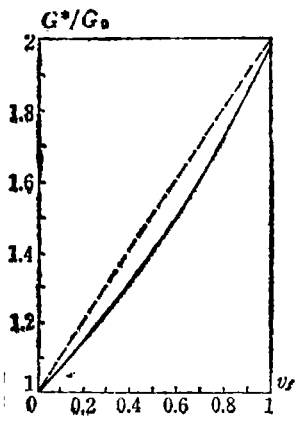

图 1 有效剪切模量随夹杂体积含量的变化

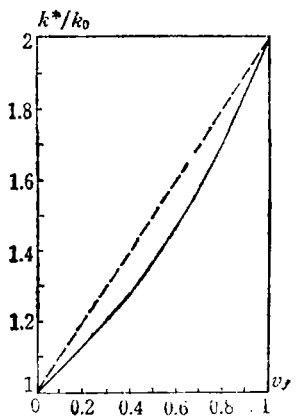

图 2 有效体模量随夹杂体积含量的变化

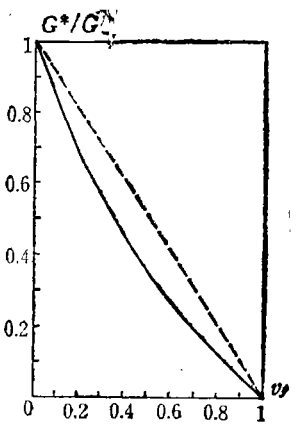

图 3 有效剪切模量随夹杂体积含量的变化

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n

计算结果示于图 5 及图 6 中。

(2) 软夹杂情况 ($E_f < E_m$)

$$2G_0 = 4000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda_0 = 3000\text{kg/mm}^2$$
$$2G = 2000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda = 1500\text{kg/mm}^2 \tag{52}$$

计算结果示于图 7 及图 8 中。

(3) 空洞情况

$$2G_0 = 2000\text{kg/mm}^2 \qquad \lambda_0 = 1500\text{kg/mm}^2$$
$$2G = \lambda = 0$$

计算结果示于图 9 中。 (53)

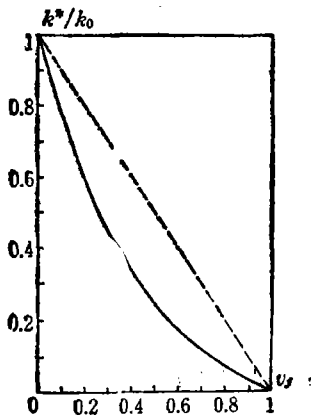

图 4　有效体模量随夹杂体积含量的变化

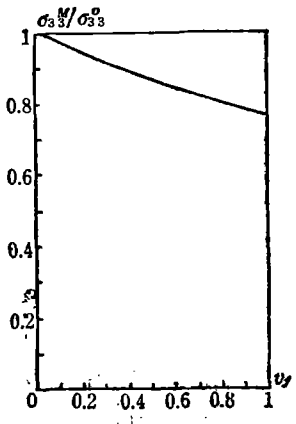

图 5　应力均值$\langle\sigma_{33}^M\rangle$随夹杂体积含量的变化

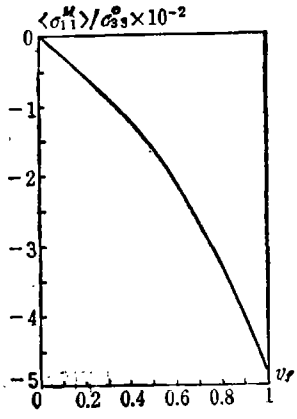

图 6　应力均值$\langle\sigma_{11}^M\rangle$随夹杂体积含量的变化

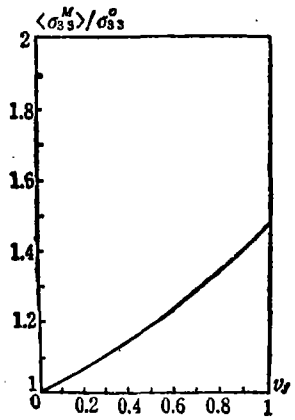

图 7　应力均值$\langle\sigma_{33}^M\rangle$随夹杂体积的含量变化

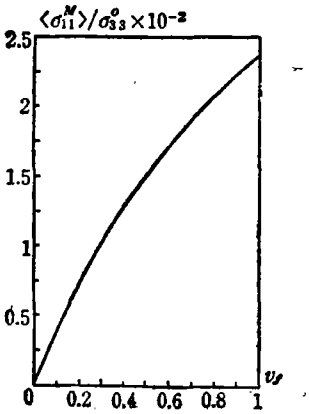

图 8　应力均值$\langle\ ^M_{11}\rangle$随夹杂体积含量的变化

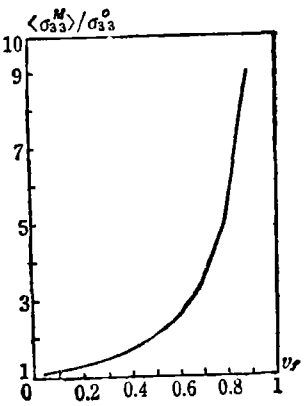

图 9　应力均值$\langle\sigma_{33}^M\rangle$随夹杂体积含量的变化

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n

参 考 文 献

[1] Krōner E. Self-Consistent Scheme and Graded Disorder in Polycrystal Elasticity, J. phys. F: Metal phys., 8, 11(1978).

[2] Budiansky B. and O'Connell RJ. Elastic Moduli of A Crached Solid, Int. J. Solids Structure, 12, (1976)81-97.

[3] Horii H. and S. Nemat-Nasser, Overall Moduli of Solid with Microcracks: Load-Induced Anisotropy, J. Mech. Phy. Solids, 31, (1983)155.

[4] Tandon G. P. and Weng G. J. Stress Distribution in and Around Spheioidal Inclusions and Voids at Finite Concentration, ASME, J. APPL. Mech. 53, (1986)511.

[5] Eshelby J. D. ,The Determmation of Elastic Field of Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, Pro. Roy. Soc., London A241, (1957)376.

[6] Kunin I. A. ,Elastic Media with Microstructure Ⅰ. Springer-verlag, (1983)68-121.

[7] Kunin I. A. ,An Algebra of Tensor Operators and its Applications to Elasticity, Int. J. Eng. Sci., 19, (1981)1551.

[8] Snyder D. L. 著，梁之舜，邓永录译. 随机点过程，人民教育出版社，(1981).

STATISTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIA WITH RANDOMLY DISTRIBUTED INCLUSIONS

Wang Biao, Wang Dianfu and Wang Duo

(Tsingua Vniversitg) (Harbin Institute of Technology)

Abstract

Based on Kunin's microstructure theory, the Random Point Field Theory is proposed to study a statistically inhomogeneous medium with random distributed inclusions. By using the theory, several examples are worked out. such as the effective modulus of composites and the microfield around and in an inclusion.

Key words

Statistically inhomogeneous medium, Random point field theory, Effective modulus, Micro-field.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.n

附录　三维空间中的随机点场理论

类似于随机点过程理论[8]，在三维空间中，我们将泊松点场定义为

1．定义：一个在三维空间 V 中的泊松点场定义为具有下列性质的计数场 $\{N_v; v\subset V\}$。

1）在 v 中，点的数目 N_v 具有参数为 Λ_v 的泊松分布，即对于 $n=0, 1, 2, \cdots$

$$P_r[N_v=n]=(n!)^{-1}\Lambda_v^n\exp[-\Lambda_v] \tag{A.1}$$

2）$\{N_v;\ v\subset V\}$ 在任意不相重叠的区域 v_1，v_2，…中具有独立增量，即

$$P_r[N_{v_1}=n_1,\ N_{v_2}=n_2,\ \cdots Nv_k=n_k]=\prod_{i=1}^{K}P_r[N_{v_i}=n_i] \tag{A.2}$$

在所定义的空间中，Λ_v 即可能是连续函数，也可能具有跳跃点，若为连续函数，可以表示成

$$\Lambda_v=\iiint_v\lambda(x, y, z)dv \tag{A.3}$$

式中，λ 为强度函数。

2．几个重要的统计量

1）在 v 中存在 n 个有序泊松点，其位置如何？

设泊松点 $w_1\in\Delta v_1$，$w_2\in\Delta v_2$，$\cdots w_n\in\Delta v_n$，而 $v-\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i$ 中无泊松点存在，则概率

$$\begin{aligned}&P_r[w_1\in\Delta v_1,\ w_2\in\Delta v_2,\ \cdots w_n\in\Delta v_n,\ k=0\ \text{当}\ v-\sum_{i=1}^{n}\Delta v_i]\\&=P_r[N_{\Delta v_1}=1]P_r[N_{\Delta v_2}=1]\cdots P_r[N_{\Delta v_n}=1]P_r[N_{v-\Sigma\Delta v}=0]\\&=\prod_{i=1}^{n}\Lambda_{\Delta v_i}\exp[-\Lambda_v]\end{aligned} \tag{A.4}$$

概率密度函数为

$$\begin{aligned}p&=\lim_{\max\Delta v_i\to 0}\left(\prod_{i=1}^{n}\Delta v_i\right)^{-1}P_r\\&=\prod_{i=1}^{n}\lambda_{w_i}\exp[-\Lambda_v]\end{aligned} \tag{A.5}$$

如果认为 w_1，w_2，$\cdots w_n$ 是无次序的，则

$$p_0=(n!)^{-1}\prod_{i=1}^{n}\lambda w_i\exp[-\Lambda_v] \tag{A.6}$$

2）在 V 中存在 n 个泊松点的条件下，这 n 个点的位置分布。

$$\begin{aligned}p_w(w\mid N_v=n)&=p(w,\ N_v=n)/P(N_v=n)\\&=\prod_{i=1}^{n}(\lambda w,\Lambda_v^{-1})\end{aligned} \tag{A.7}$$

故，

$$p_w(w\mid N_v=n)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda w_i\left[\iiint_v\lambda dv\right])^{-1} \tag{A.8}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.n