哈尔滨工业大学学报

1987年9月 JOURNAL OF HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

层合板强度分布的统计解析

材力教研室 王彪 王殿富

摘　　要

考虑到层合板的刚度及单层强度等随机性因素对层合板强度及疲劳寿命的影响，本文提出了一解析形式公式用来予测层合板强度分布及疲劳寿命的分布。工作出发点是已知了单层的基本强度及疲劳性能。最終用 monte—carlo 方法进行了模拟比较。

关键词： 层合板；统计学方法；强度分布；疲劳寿命分布；显函表达式；Gram—Charlier展开。

复合材料的强度及疲劳寿命具有较大的分散性。为决定单向复合材料的强度分布，已进行了一些实验及理论工作[1—5]，*S.E.Yamada*和*C.T.Sun*[6]应用*Monte—Carlo*模拟技术对单向及层合复合材料的强度分布进行了估计。

这项研究的主要困难在于复合材料层合板破坏机理的复杂性。现在被认为较为成功的方法是通过每一层坯中基本强度值及疲劳寿命的分布来予测层合板的强度及寿命分布。

计及向题的复杂性，诸如刚度矩阵的随机性，基本强度值的随机性，本文得出了一个解析的强度分布的表达式，及实用的疲劳寿命分布计算方法，并同模拟结果进行了比较。

一、分　　析

(1)　层合板静态强度分析

a.　层合板各层应力计算

研究一个对称铺设的复合材料的层合板单元，受面内应力作用。其本构关系可表示为：

$$\varepsilon_i = \sum_j B a_{ij} \bar{\sigma}_j \quad i、j = 1,2,6 \tag{1}$$

式中，ε_i是名义弹性应变；$\bar{\sigma}_j$是名义面内应力，a_{ij}是层合板柔度；B是板厚。

其第K层坯（$k=1,2,\cdots n$）的应力应变关系为：

$$\sigma_i^{(k)} = \sum_j \bar{\theta}_{ij}^{(k)} \bar{\varepsilon}_j \tag{2}$$

式中，$\bar{\theta}_{ij}^{(k)}$是第K层板的偏轴模量，$\bar{\varepsilon}_j$是层合板面内弹性应变。将（1）式代入（2）式得：

$$\sigma_i^{(k)} = \sum_j \zeta_{ij}^{(k)} \bar{\sigma}_j \tag{3}$$

本文于1986、11、收到。

式中，$\zeta_{ij}^{(k)}=\sum\limits_{m}B\overline{\theta}_{im}^{(k)}a_{mj}$ $(m=1,2,6)$

由于工艺等不一致性，层合板柔度$\hat{a}_{ij}$及K层板的偏轴模量$\hat{\theta}_{ij}^{(k)}$除其主项a_{ij}，$\overline{\theta}_{ij}^{(k)}$外，还有一随机扰动项，即，

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{ij}^{(k)}&=\overline{\theta}_{ij}^{(k)}+\Delta\overline{\theta}_{ij}^{(k)}\\ \hat{a}_{ij}&=a_{ij}+\Delta a_{ij}\end{aligned}\tag{4}$$

将（4）式代入（3）式可得：

$$\begin{aligned}\sigma_i^{(k)}&=\sum_j\hat{\zeta}_{ij}^{(k)}\overline{\sigma}_j\\ &=\sum_j{}_{ij}^{(k)}\overline{\sigma}_j+\sum_j\Delta\zeta_{ij}^{(k)}\overline{\sigma}_j\end{aligned}\tag{5}$$

式中，$\Delta\zeta_{ij}^{(k)}=\sum\limits_{m}B\left(\overline{Q}_{im}^{(k)}a_{mj}+a_{im}\Delta\theta_{jm}^{(k)}\right)+\sum\limits_{m}B\left(\Delta\overline{Q}_{im}^{(k)}\Delta a_{jm}\right)$是由于刚度矩阵的随机扰动对各层坯内应力的影响。

b. 单向层坯的破坏准则及其分布

在层合板破坏的最后阶段，假设所有层坯的横向均已破坏。因此，横向弹性模量及泊松系数都等于0，这样 *Tsai—Wu* 强度准则成为：

$$\left(\frac{\sigma_1}{x_1}\right)^2+\left(\frac{\tau_{12}}{x_2}\right)^2=l^2\tag{6}$$

$$\begin{cases}l\geqslant1 & \text{破坏}\\ l<1 & \text{不破坏}\end{cases}$$

式中，x_1，x_2被认为是服从二参数的 *Weibull* 分布的随机变量。下面通过应用*Gram—Charlier* 展开技术而得到L的分布函数。作为随机变量，L可以表示为：

$$L=L(x_1,x_2,x_3)\qquad x_3=\Delta\zeta_{ij}^{(k)}\tag{8}$$

L的前四阶中心矩可表示为（10）

$$\begin{aligned}U_1(L)&=L(Ex_1,Ex_2,Ex_3)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2L}{\partial x_i^2}U_2(x_i)\\ U_2(L)&=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)^2U_2(x_i)+\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial^2L}{\partial x_i^2}\right)U_3(x_i)\\ U_3(L)&=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)^3U_3(x_i)\\ U_4(L)&=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)^4U_4(x_i)+6\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right)^2\left(\frac{\partial L}{\partial x_j}\right)^2U_2(x_i)U_2(x_j)\end{aligned}\tag{8}$$

其中，第三，四阶矩仅限于最低阶非零项。

由 $\alpha(L)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}L^2}$ 及$D=\frac{d}{dL}$

则 $$(-D)\alpha^r(L)=H_r(L)\alpha(L)\tag{9}$$

式中，$H_r(L)$是最高阶项 L^r系数为1的Chebyshev—Hemite 多项式，$H_r(L)=L^r-\frac{r^{(2)}}{2!}L^{r-2}+\cdots$

假设L的分布密度函数可以展开成$\alpha(L)$的导数系列，则它可以表示为：

$$f(L)=\sum_{j=0}^{\infty}C_jH_j(L)\alpha(L) \tag{10}$$

由于$H_r(L)$的正交性质，即

$$\int_{+}^{-}H_m(x)H_n(x)\alpha(x)dx=0 \qquad m\neq n$$
$$=n! \qquad m=n$$

因此，
$$C_r=\frac{1}{r!}\int_{-}^{-}f(x)H_r(x)dx$$

最终$f(L)$的表达式为：

$$f(L)=\alpha(L)\left[1+\frac{1}{2}(U_2-1)H_2+\frac{1}{6}U_3H_3+\frac{1}{24}(U_4-6U_2+3)H_4+\cdots\right] \tag{12}$$

c. 层合板的强度分布

由层合板的强度理论，其不破坏的概率为，

$$p_s=p_r\left[\max_n(L^{(k)})<1\right] \tag{13}$$

当层坯的数目较大时，($n>8$)，L的极大值分布可以表示为〔11〕。

$$G(L)=exp\{-n(1-F(L))\} \tag{14}$$

若原分布$F^{(L)}$具有上确界L_u,$F(L_u)=1$，且$F^r(L_u)=0(r=1,2,\cdots k-1)$及$F^k(L_u)\neq 0$ $G(L)$的指数可以在L_u处展成泰勒极数，忽略高阶项，得

$$G(L)=exp\{-〔(-nF^{(k)}(L_u)/k!)^{1/k}(L-L_u)^k〕\} \tag{15}$$

这正是三参数的 Weibull 分布。

(2) 层合板的疲劳寿命分布

假设层合板梁由大量层坯组成，而所有层坯又可分为两大类，一类为弱项（寿命用N_w表示），一类为强项（寿命用N_s表示）。由大量的实验事实可知，在某一应力水平下，层坯的疲劳寿命可表示成Weibull分布，即

$$p(N_w|\sigma)=1-exp\left(\frac{N_w}{N_{wo}}\right)^{\beta} \tag{16}$$

$$P(N_s/\sigma)=1-exp(N_s/N_{so})^{\beta} \tag{17}$$

再进一步认为，通过层合板梁的动力学分析，设单层坯的应力水平分别为$\sigma_m{}^1$,$\sigma_m{}^2$,…$\sigma_m{}^n$，由于刚度等几何尺寸的随机变化，$\sigma_m{}^1\cdots\sigma_m{}^n$均为随机变量。作为问题的简化，我们分别应用弱层坯及强层坯所受的应力均值，作为二项寿命予测的应力水平，即

$$\bar{\sigma}_w=\frac{1}{k_w}\sum_{i=1}^{kw}\sigma_{mw}{}^i \tag{18}$$

$$\bar{\sigma}_s=\frac{1}{k_s}\sum_{i=1}^{ks}\sigma_{ms}{}^i \tag{19}$$

式中，
$$k_w+k_s=n$$

当K_w及K_s较大时，由中心极限定理，可以认为，$f(\bar{\sigma}_w) \sim N\{\frac{1}{k_w}\sum_{i=1}^{k_w} E\sigma_{mw}{}^i, \frac{1}{k_w{}^2}\sum_{i=1}^{k_w} E(\sigma_{mw}{}^i)^2\}$，$f(\bar{\sigma}_s) \sim N\left\{\frac{1}{k_s{}^2}\sum_{i=1}^{k_w} E(\sigma_{ms}{}^i)^2, \frac{1}{k_s{}^2}\sum_{i=1}^{k_w} E(\sigma_{ms}{}^i)^2\right\}$即服从正态分布。

这样，可以求得寿命N_w及N_s同应力水平σ_w，σ_s的联合分布密度函数为

$$f_w(N,\sigma_w) = p(N|\sigma_w)\cdot f(\sigma_w) \tag{20}$$

$$f_s(N,\sigma_s) = p(N/\sigma_s)\cdot f(\sigma_s) \tag{21}$$

最终，可以求得层合板寿命分布为。

$$\begin{aligned}\Phi(M) &= 1 - p_r\{(N_w<M)\bigcap(N_s<M)\}\\ &= 1 - F_w(N,\sigma_w)\cdot F_s(N,\sigma_s)\end{aligned} \tag{22}$$

式中，$F_w(N, \sigma_w)$，$F_s(N, \sigma_s)$分别为弱项及强项的寿命分布函数。

二、结论及讨论

已知有限的实验数据为计算层合板的破坏概率可以通过两种途径，一是解析的近似表达式，二是 *Monte—Carlo* 模拟技术，前者的计算量比后者小得多，而两者的精确程度基本一致[图1,2]。图3是对刚度矩动扰动影响的研究结果。

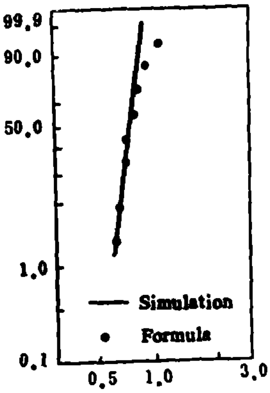

图 1

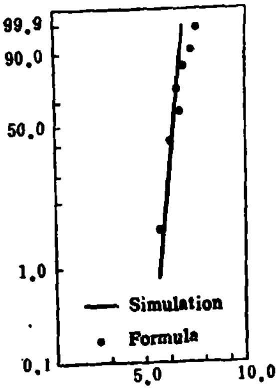

图 2

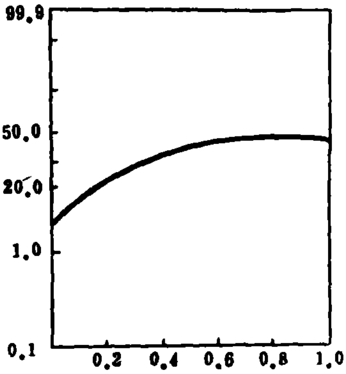

图 3

在受单向载荷的情况下，强度准则为，

$$N_x{}^2\varphi^2(x_1,x_2) = L^2 \tag{23}$$

这样，

$$\begin{aligned}&max[N_x{}^2 - \varphi^2(x_1,x_2)]\\ &= N_x{}^2 max[\varphi^2(x_1,x_2)]\\ &= max(L^2)\end{aligned} \tag{24}$$

将（24）代入（25）中可得，

$$G'(N_x) = exp\left\{-\left[\left(-\frac{nF^{(k)}(L_u)}{k!}\right)^{1/k} max(\varphi).\left(N_x - \frac{L_u}{\varphi}\right)\right]^k\right\} \tag{25}$$

破坏的概率为，

$$p_f = 1 - G'(N_x) \tag{26}$$

这即为三参数 *weibull* 分布，同实验中得到的结论吻合。

参 考 文 献

[1] C.T.Sun and T.E.Yamada,Strength Distribution of Unidirectioral Fiben Composite, J. Comp. Mater, , 1978; 12:169.

[2] H.E. Daniels, The Statistical Theory of The Strength of Bundles of Threads, proc. royal Scc. (London), 1945;183:405.

[3] B.W. Rosen,Tensile Failure of Fibrous Composites, ALAA Journal.1964; 21:1985.

[4] D.G. Harlow and A.S.Argon, The Chain-of-bundles probability Model for The Strength of Fibrous Material I. II. , J. Comp Mater., 1978; 12:195.

[5] S. E. Yamada and C. T. Sun, Analysis of Laminate Strength and Its Distrbution. , J. Comp. Mater. 1978;12:275.

[6] C. T. Herakovieh, Inelastic Behavior of Composite Material, ASME Applied Mechanics Symposia Series. AMD vol. 13(1975).

[7] S. W. Tsai, Strength Theories of Filamentary Science, Fundamental Aspects of Fiber Reinforced plastic Composite. Interscience publisher. 1966.

[8] S. W. Tsai and E. W. Wu, A Genery Theory of Strength for Arisotropic Materials, J. Comp. Mater. 1971;5:58.

[9] Hisao Fukunaga and Tau-wei Chou. Probabilistic Failure Strength Analysis of Graphte/Epoxy Cross-Ply Laminates., J.Comp. Mater.1984; 18:339.

[10] G. J. Hahn. S. S. Shapiro. Statistical Models of Engineering. John Wiley. New York. 1967.

[11] M.C. Kendal. A. Stiart. The Advanced Theory of Statistics. 4rd ed. vol. 1 Hafner publishing. New York. 1979.p347.

(下转120页)

A is the attenuation value of microwave energy which has passed through the coal sample.

C. Evaluation and Experimental Results

Substitute the values in A and B into the error formula, then you will obtain the result of evaluation: $\Delta M = 0.32\%$.

On the rated conditions the experimental result $\Delta M = 0.5\%$ (confidence probability: $P_b > 95\%$) was obtained in a laboratary.

In the adverse circumstances (AC. voltage: 160—250v) the experimental result $\Delta M = 0.7\%$ (confidence probability: $P_b > 95\%$) was obtained in a workshop of processing coal.

The fact shows that an approximate agreement between the theoretical evaluation and the experimental results has been found.

上接第123页

The modified coefficient of concave-convex profile worm-gear pairs should be chosen to be a negative value, because the smaller the modified coefficient is, the higher the load-capacity is. It is advisable to choose to be -1 to 0.

(上接第117页)

A Statistical Analusis of the Strength Distributionin in Laminated Wood

Wang Biao Wang Dianfu

Abstract

In the formula given in this paper, the effects of random factors, the stiffness of laminated wood, the strength of its single ply, etc are taken into consideretion. The starting point of our work is that the strength and fatigue life of 3-ply wood has been known. In this paper, the Monte-Carlo method is used to make a simulation comparison to check the retults of the examples given.

Key Words: Laminate; statistical method; strength distribution; fatigue life distribution; explict formula; gram-Charlier expansion;